Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

“Existencia de solución de un sistema hiperbólico no lineal con condición de inclusión en la frontera”

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Victoriano YAURI LUQUE

ASESOR

Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2018

Referencia bibliográfica

Yauri, V. (2018). *"Existencia de solución de un sistema hiperbólico no lineal con condición de inclusión en la frontera"*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas / Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 11:30 horas del día lunes 03 de setiembre del dos mil dieciocho, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro e integrado por los siguientes miembros, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa (Jurado Evaluador); Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (Jurado Informante), Mg. Carlos Gilberto Quicaño Barrientos (Jurado Evaluador) y el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA HIPERBÓLICO NO LINEAL CON CONDICIÓN DE INCLUSIÓN EN LA FRONTERA» presentada por el Bachiller Victoriano Yauri Luque para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Victoriano Yauri Luque respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Victoriano Yauri Luque aprobado con el calificativo de ...Muy........... Bueno (17)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura** al Bachiller Victoriano Yauri Luque.

Siendo las .12:30. horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
MIEMBRO

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
PRESIDENTE

Mg. Carlos Gilberto Quicaño Barrientos
MIEMBRO

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
MIEMBRO

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
MIEMBRO ASESOR

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA HIPERBÓLICO NO LINEAL CON CONDICIÓN DE INCLUSIÓN EN LA FRONTERA.

por:

Victoriano Yauri Luque

Tesis presentada a consideración del jurado examinador nombrado por la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de **Magister en Matemática Pura**.

Aprobado por:

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
Presidente

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro

Mg. Carlos Gilberto Quicaño Barrientos
Miembro

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
Miembro

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro Asesor

Lima - Perú

2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Victoriano Yauri Luque

Existencia de solución de un sistema hiperbólico no lineal con condición de inclusión en la frontera.
Lima: UNMSM / Magister en Matemática Pura, 2018.
viii, 57 p., 29.7cm, Tesis - Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas. Unidad de Posgrado

DEDICATORIA

A mis hijos Farid Víctor, Renzo Rodrigo y Andrea Liliana.

A mi señora Lola.

A mi prima Victoria.

A mi Padre Vicente y mis hermanas.

Quienes con su cariño, su amor, su compañía, su aliento y su recuerdo llenan cada día de mi vida.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a mi familia, mis hijos Farid Víctor, Renzo Rodrigo y Andrea Liliana, mi señora Lola y mi prima Victoria que son el núcleo de mi hogar, por haberme alentado en todo momento y haberme permitido sacrificar los momentos familiares, para dedicarlos en horas de trabajo.

Agradezco en especial al Dr. Alfonso Pérez Salvatierra por el continuo apoyo y orientación académica para culminar este trabajo.

Agradezco a mis familiares por su apoyo incondicional brindado por ellos de igual manera a mis amigos que de forma directa o indirecta me apoyaron en todo momento.

Resumen

Existencia de solución de un sistema hiperbólico no lineal con condición de inclusión en la frontera.

Victoriano Yauri Luque

Setiembre, 2018

Asesor : **Dr. Alfonso Perez Salvatierra**

Grado obtenido : **Magister en Matemáticas**

En el presente trabajo, se estudiará un sistema Hiperbólico no lineal con un término discontinuo multivaluado y con término de amortiguamiento no lineal de segundo orden sobre la frontera, respecto a la existencia de solución generalizada y el comportamiento asintótico exponencial de su energía asociada al sistema dado por:

$$
(1) \qquad \left\| \begin{array}{l}
u'' - \Delta u' - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + u^3 = f; \quad \text{en } (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T) \\[2mm]
u(x,0) = u'(x,0) = 0 \qquad \text{en } \Omega \\[2mm]
u = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\[2mm]
\dfrac{\partial u'}{\partial \nu} + M(\|\nabla u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + K(u)u'' + |u'|^\rho u' + \Xi = 0\,, \ \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \\[2mm]
\Xi(x,t) \in \varphi(u'(x,t)) \ \ c.s. \ (x,t) \in \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T)
\end{array} \right.
$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ con frontera suficientemente regular $\Gamma = \partial\Omega$, tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \Phi$ y Γ_0, Γ_1 tienen medidas positivas, $\rho \in (1, +\infty)$, $M(s)$ función de clase C^1 tal que $M(s) > m_0 > 0$ para alguna constante $m_0, K(s)$ es una función positiva, continuamente diferenciable, ν es un vector normal unitario hacia afuera sobre Γ, φ es una aplicación multivaluada no lineal y discontinua, T es un número real positivo, u^3 es el término no lineal, Ξ término de inclusión que es un operador diferencial.

Palabras Claves: Hiperbólico, Inclusión diferencial, Amortiguamiento no lineal

Abstract

Existence of solution of hyperbolic system non-linear with condition of inclusion on the boundary.

Victoriano Yauri Luque

Setiembre, 2018

Assessor : **Dr. Alfonso Pérez Salvatierra**

Degree qualification : **Master in Matematics**

In the present work, we will study a non-linear hyperbolic system with a multivalued discontinuous term and with a second-order non-linear damping term on the Boundary, with respect to the existence of a generalized solution and the exponential decay of its energy associated with the system given by:

$$
(1) \qquad \left\|\begin{array}{l}
u'' - \Delta u' - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + u^3 = f; \quad \text{en } (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T) \\
u(x,0) = u'(x,0) = 0 \qquad \text{en } \Omega \\
u = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\
\dfrac{\partial u'}{\partial \nu} + M(\|\nabla u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + K(u)u'' + |u'|^{\rho}\, u' + \Xi = 0\,, \ \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \\
\Xi(x,t) \in \varphi(u'(x,t)) \ \ c.s. \ \ (x,t) \in \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T)
\end{array}\right.
$$

where Ω is an open set sufficiently regular of $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ with boundary $\Gamma = \partial\Omega$, such that $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \Phi$ and Γ_0, Γ_1 have positive measures, $\rho \in (1, +\infty)$, $M(s)$ class function C^1 such that $M(s) > m_0 > 0$ for some constant m_0, $K(s)$ is a function positive, continuously differentiable, ν is a unit normal vector, outward on Γ, φ is a non-linear and discontinuous multi-valued application, T is a positive area number, u^3 It is the non-linear term, Ξ inclusion term, which is a differential operator.

Key Words: Hyperbolic, differential inclusion, Non-linear damping

Índice general

Introducción

El interés para el estudio de las inclusiones diferenciales se produce con el desarrollo de la teoría de control, es decir, el estudio de los sistemas dinámicos.

$$\begin{cases} x^{'}(t) & = & f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \tag{0.1}$$

“ Controlado” por los parámetros $u(t)$ (los “controles”). De hecho, si introducimos la aplicación multivaluada con valores establecidos

$$F(x,t) := \{f(t,x,u)\}_{u \in U}$$

Las soluciones a las ecuaciones diferenciales (0.1) son soluciones a la “inclusión diferencial”

$$\begin{cases} x^{'}(t) & \in & F(t, x(t)) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \tag{0.2}$$

en el que los controles no aparecen explícitamente. La teoría de sistemas proporciona sistemas dinámicos de la forma

$$\begin{cases} x^{'}(t) & = & A(x(t))\dfrac{d}{dt}[B(x(t)) + C(x(t))]; \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \tag{0.3}$$

En el que la velocidad del estado de los sistemas depende no solo del estado $x(t)$ del sistema en el tiempo t, sino también de las variaciones de las observaciones $B(x(t))$ del estado. Este es un caso particular de una ecuación diferencial implícita

$$\begin{cases} f(t, x(t)); \\ x'(t) = 0 \end{cases}$$

que se puede considerar como una inclusión diferencial (0.2) donde el lado derecho F está definido por

$$F(t, x) := \{v / f(t, x, v) = 0\}$$

Durante la década de los 60 y 70, se investigó con mayor énfasis una clase especial de inclusiones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} x'(t) \in -A(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Donde A es un mapa de "monotonía máxima" .

Esta clase de inclusiones contiene la clase de "inclusiones del gradiente" que generalizan las ecuaciones de gradiente usuales

$$\begin{cases} x'(t) \in -\nabla V(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde V es un "potencial" diferencial, ver J. P. Aubin et Al [2].

En J. P. Aubin [3, 4], la teoría de la viabilidad se describe como una teoría matemática basada en tres características principales, a saber:

(i) No determinismo de las evoluciones

(ii) Restricciones de viabilidad

(iii) Principio de inercia

Las dos primeras características conciernen a la evolución del estado del sistema estudiado y reflejan el hecho de que un sistema puede evolucionar de muchas maneras diferentes y posiblemente impredecibles dependiendo de su estado inicial, su evolución pasada, el entorno en el que evoluciona o cualquier otro factor (no determinismo), y también el hecho de que, por muchas razones, la evolución de un sistema está restringida por algunas condiciones que deben cumplirse en cada instante de tiempo. Estos son los dos pilares fundadores de los modelos de la teoría de viabilidad. La última característica (principio de inercia) se refiere a las variables de control [20, 21, 24] y estipula que estos controles se cambian solo cuando se requiere para mantener la viabilidad.

Se pueden modelar algunos sistemas tomados de la realidad que usan los conceptos propios de la Matemática Difusa (conjuntos, multifuncionales e inclusiones diferenciales "fuzzy"), considerados como Problemas de Valor Inicial para Inclusiones Diferenciales “fuzzy”, analizándose la existencia local. Aplicados a la Economía y Biología

Los problemas de optimización en Economía frecuentemente tienen soluciones múltiples. Así, los elementos básicos del modelo de equilibrio general: oferta de los productores, y demanda de los consumidores, no se pueden representar por funciones univaloradas. Ello conduce al estudio de un tipo especial de relación entre las variables económicas, que ha venido siendo conocido con el nombre de correspondencias, o funciones multivaloradas. Los aspectos más relevantes de este tipo de relaciones se refieren a propiedades de “continuidad”, concepto que puede extenderse de dos formas diferenciadas, dando origen a las ideas de hemicontinuidad superior e inferior, y a las condiciones de existencia de puntos fijos para correspondencias de un conjunto en sí mismo. Estos resultados son cruciales a la hora de probar existencia de equilibrio en los modelos económicos de equilibrio general, así como en teoría de juegos. Esto es una aplicación de la Inclusión Diferencial Este curso está dedicado al estudio de este tipo de funciones multivaloradas, y a sus aplicaciones básicas en los modelos económicos. Ver A. Fernández et Al [9].

Algunos teoremas de la teoría de la viabilidad que son relevantes para los problemas de control no lineal con el estado, las restricciones y las restricciones de control dependientes del estado se motivan y se estudian. Todos ellos tratan con soluciones viables para problemas de control no lineal, es decir, soluciones que satisfagan en cada limitación del estado instantáneas dadas de una naturaleza general y diversa. Se pueden discutir por área de aplicación, incluidos los ecosistemas y la biología de la población, el cambio climático, la silvicultura y otros, ver J. P. Aubin [3].

Otros antecedentes de estos problemas de Inclusión Diferencial (ID) se encuentran en la física, especialmente en Mecánica de Sólido, donde las leyes constitutivas no monótonas y multivaluadas conducen a una ID, generalmente estas ID se encuentran en las mismas ecuaciones como se pueden ver en [6, 9, 10, 21, 27]

En G.G. Doronin et Al [8], en su artículo Hiperbolic problema with nonlinear second-order boundary damping, modelado por

$$
(0.4) \qquad \left| \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u = f, \quad \text{en } Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + K(u)u_{tt} + |u_t|^p\, u_t = 0\,, \ \text{ sobre } \Sigma \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{array} \right.
$$

estudiaron el sistema (0.1) motivado a resultados estudiados en J.L. Lions [14], en el cual consideran variedades de problemas con condición de frontera no lineales donde, u función incógnita satisface la ecuación de Laplace en un cilindro Q con condición de frontera

$$
(0.5) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} + u_{tt} + |u_t|^p\, u_t = 0\,, \ \text{ sobre } \Sigma
$$

Esta ecuación modela las ondas de agua con fronteras libres.

La condición de frontera,

$$
\frac{\partial u}{\partial \nu} + |u_t|^p\, u_t = 0\,, \ \text{ sobre } \Sigma
$$

surge estudiando los flujos de un gas en canales con paredes porosas.

La presencia de la segunda derivada con respecto a la variable temporal en la condición de frontera se debe a las fuerzas internas que actúan sobre las partículas del medio en la frontera exterior.

El término $K(u)u_{tt}$, modela las fuerzas internas cuando la densidad del medio depende del desplazamiento.

En el estudio realizado por Doronin et Al [8], consideran la ecuación de onda clásica la que mencionan en (0.5) puede reemplazarse por la ecuación de evolución de segundo orden de la forma,

$$
u_{tt} + A(t)u + F(u, u_t) = f \text{ en } \Sigma
$$

Donde $A(t)$ es un operador lineal estrictamente elíptico y $F(u, u_t)$ es una función adecuada de u y u_t . Además, ecuaciones elípticas o hiperbólicas-parabólicas pueden ser consideradas.

En el artículo de Yeoul Park et Al [28], estudiaron el sistema Hiperbólico con inclusión Diferencial en la frontera y amortiguamiento no lineal de segundo orden en la frontera dado por,

$$
(0.6) \qquad \left|\begin{array}{l}
u'' - \Delta u' - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u = f; \quad \text{en } (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T) \\
u(x,t) = u'(x,0) = 0, \qquad\quad \text{en } \Omega \\
u = 0, \;\; \text{en } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\
\dfrac{\partial u'}{\partial \nu} + M(\|\nabla u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + K(u)u'' + |u'|^\rho\, u' + \Xi = 0\,, \;\; \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \\
\Xi(x,t) \in \varphi(u'(x,t)) \;\; c.s. \;\; (x,t) \in \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T)
\end{array}\right.
$$

Ellos estudiaron la existencia de soluciones generalizadas para el sistema Hiperbólico con un término discontinuo multivalor y término de amortiguamiento de segundo orden no lineal en la frontera; usando la técnica de las aproximaciones de Faedo - Galerkin, desigualdad de Young y densidad en los espacios de Sobolev.

En el trabajo de Jong Yeoul, et Al [12], estudian la existencia de soluciones débiles globales para una inclusión diferencial hiperbólica con un término multivalor discontinuo y no lineal. También investigan el comportamiento asintótico de la solución débil global de la desigualdad hemivariacional asintótico de las soluciones, para el sistema siguiente,

$$
(0.7) \qquad \left|\begin{array}{l}
0 \in u_{tt} + A^2 u + M(\left\|A^{1/2}\right\|^2)Au + \varphi(u_t), \quad \text{en } (0,+\infty) \times \Omega \\
u(0) = u_0 \;\; , \;\; u_t(0) = u_1, \qquad\quad \text{en } \Omega
\end{array}\right.
$$

donde φ es un mapeo de valores de conjunto discontinuo y no lineal al llenar en saltos una función $b \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$.

El fundamento de estos problemas variacionales se encuentra en la física, especialmente en la mecánica del continuo, donde las leyes constitutivas no monótonas y multivaluada conducen a las desigualdades hemivariacionales antes citadas.

En este punto es importante mencionar que tales desigualdades hemivariacionales fueron estudiadas por algunos autores [18, 19], pero en sus trabajos no se obtuvieron tasas de decaimiento como en el trabajo [12].

En el presente trabajo estudiamos un sistema Hiperbólico no lineal con un término discontinuo multivaluado y con término de amortiguamiento no lineal de segundo orden sobre la frontera, existencia de la solución y el comportamiento asintótico de la energía asociada al sistema considerado, el termino no lineal u^3, en la primera ecuación del sistema (0.6) y que es expresado por el sistema (1), mencionado en el resumen del presente trabajo.

Motivado por el trabajo realizado por Yeoul Park et Al [28], estudiamos la existencia (ver también [10, 11, 29]). Para el comportamiento asintótico y sus regularidades nos informamos de [12, 21].

El desarrollo del presente trabajo se hará de la siguiente manera:

- Se hará una breve introducción respecto a los antecedentes y las posibles aplicaciones de trabajos de éste tipo ya realizados.

- En el primer capítulo de dará nociones básicas, resultados auxiliares y resultados principales que ayudarán al desarrollo del trabajo.

- En el segundo capítulo, se demuestra la existencia de la solución generalizada del sistema (1).

- En el tercer capítulo se estudia el comportamiento asintótico de la energía asociado al sistema (1).

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo estableceremos un resumen sobre las definiciones y teoremas que serán de utilidad para lograr el objetivo trazado en el presente trabajo de tesis, asumiendo conocidas los resultados básicos del análisis funcional y las ecuaciones diferenciales parciales.

1.1 Espacios $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$

Definición 1.1.1

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$, definimos

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ u \quad \textit{es medible} \ \ \textit{y} \ \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

donde la norma en $L^p(\Omega)$ está dado por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Y cuando $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ u \text{ es medible y } \exists M > 0 \text{ tal que } |u(x)| < M \quad \text{c.s. en } \ \Omega \}$$

y su norma dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_\infty = \text{ínf} \{ M > 0 / \quad |u(x)| \leq M \quad \text{c.s. en } \Omega \}$$

Observación 1.1.2

Si $p = 2$, entonces tenemos $L^2(\Omega)$ que es un espacio de Hilbert con el producto interno,

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

el cual induce la norma dada por

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx$$

Proposición 1.1.3

El espacio $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p < +\infty$.

Demostración. Ver Brézis [5].

Notación:

Sea $1 < p < +\infty$ se denota por p' el exponente conjugado de p y cumple que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Teorema 1.1.4 (Desigualdad de Hölder)

Sean $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y se tiene la desigualdad

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Demostración. Ver Brézis [5].

Proposición 1.1.5 (Desigualdad de Hölder Generalizada)

Sean f_1, $f_2, \ldots, f_k$, funciones tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, con $1 \leq i \leq k$, donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1,$$

entonces el producto $f = f_1.f_2.f_3., ..., f_k \in L^p(\Omega)$ y se tiene la siguiente desigualdad

$$|f|_{L^p(\Omega)} \leq |f_1|_{L^{p_1}(\Omega)} |f_2|_{L^{p_2}(\Omega)} |f_3|_{L^{p_3}(\Omega)} \cdots |f_k|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

Demostración. Ver Brézis [5].

Proposición 1.1.6 (Desigualdad de interpolación)

Si $u \in (L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega))$ *, con* $1 \leq p < +\infty$*, entonces existe una única* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$*, y se tiene la siguiente desigualdad de interpolación*

$$|u|_{L^r(\Omega)} \leq |u|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \, |u|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

donde

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}; 0 \leq \theta \leq 1.$$

Demostración. Ver Adams [1].

Proposición 1.1.7 (Teorema de la Representación de Riesz)

Si $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *con* $1 \leq p < +\infty$*, entonces existe una única función* $u \in L^{p'}(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} |u(x)v(x)| \, dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) y \, |u|_{L^{p'}(\Omega)} = |\varphi|_{(L^p(\Omega))'}$$

Demostración. Ver Brézis [5].

Proposición 1.1.8 (Lax Milgran)

Sea V *un espacio de Hilbert. Si* $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una forma bilineal, continua, simétrica y coerciva en* V *y* $f \in V'$*. Entonces existe un único* $u \in V$ *tal que*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \, , \ \forall \, v \in V$$

además $|u|_V = \dfrac{1}{C} |\, f \,|_{V'}$

Demostración. Ver Brézis [5].

Definición 1.1.9

Sean V *y* H *dos espacios vectoriales sobre* $K = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ *con* $V \subseteq H$*. Se dice que,* V *está continuamente inmerso en* H*, cuando existe una aplicación lineal continua e inyectora*

$$j : V \longrightarrow H$$

y escribiremos $V \hookrightarrow H$

1.2 Teoría de los espacios de las distribuciones

Definición 1.2.1 (Soporte)

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, una función continua dada. Definimos por soporte de u al conjunto

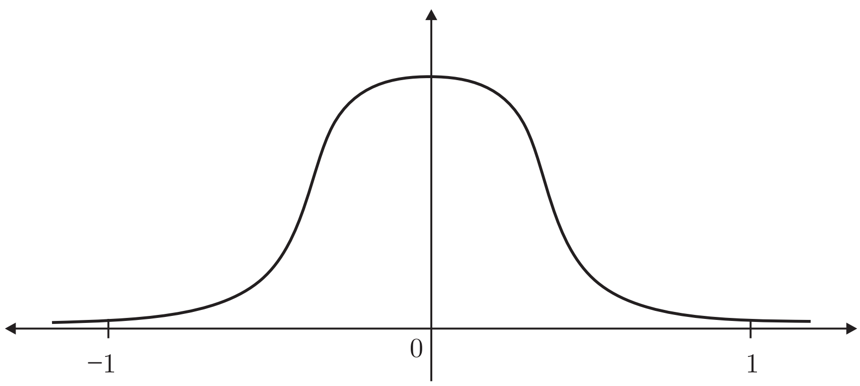
$$Sop(u) = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}^{\ \Omega}$$

Ejemplo 1 Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2}\right)} & ; \quad \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & ; \quad \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ (norma Euclidiana), en particular si $n = 1$, se tiene: $sop(\varphi) = [-1, 1]$

Ejemplo 2 Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces $sop(\varphi) = [-1, 1]$ y su gráfica es dado por:



Definición 1.2.2 (Función de prueba)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, se define

$$C_0^\infty(\Omega) \equiv C_0^\infty = \{u : \Omega \longrightarrow K \ / \ u \in C^\infty(\Omega) \ \ y \ sop(u) \ es \ compacto \ en \ \Omega\}.$$

A los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ se denomina funciones de prueba o testes.

Introducimos una topología de límite inductivo en $C_0^\infty(\Omega)$. Sea $\{\varphi_\mu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ una sucesión, diremos que $\varphi_\mu \longrightarrow 0$, si:

a) Existe $K > 0$ compacto fijo tal que, $sop(\varphi_\mu) \subset K, \forall \mu$.

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$; $D^\alpha \varphi_\mu \longrightarrow 0$, uniformemente en K.

Con esta convergencia dada en $C_0^\infty(\Omega)$ definimos $D(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega)\ ,\ \rightarrow)$ el espacio de las funciones de prueba o testes.

Proposición 1.2.3

Sean K un conjunto compacto y F cerrado no vacío de $\mathbb{R}^n$ tal que $K \cap F = \emptyset$. Entonces existe $\psi\ \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in K \\ 0 & , \quad x \in F \\ c & , \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash (K \cup F)\ ,\ c \in (0,1) \end{cases}$$

Demostración. Ver Cavalcanti [7].

Definición 1.2.4

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable de Lebesgue definida en Ω, tal que para cada compacto $K \subset \Omega$, $\displaystyle\int_K |u(x)|^p < \infty$, diremos que, u es localmente integrable y escribiremos

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible } / \int_K |u(x)|^p < \infty \ \forall K \subset \Omega \, \text{compacto} \right\},$$

para $1 \leq p < +\infty$.

Proposición 1.2.5 (Lema de Du Bois Raymond)

Sea $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

entonces $u = 0$ casi siempre (c.s.) en Ω.

Demostración. Ver Cavalcanti [7].

Definición 1.2.6 (Distribuciones sobre Ω)

Sea $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow K$ una forma lineal, diremos que:

a) T es continua en $\mathcal{D}(\Omega)$; si $\forall \{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \longrightarrow 0$, en $\mathcal{D}(\Omega)$ (en el sentido de convergencia en $\mathcal{D}(\Omega)$), entonces, $\langle T, \varphi_\nu \rangle \longrightarrow 0$, en $\mathbb{R}$

b) T es una distribución sobre Ω, si T es lineal y continua en $\mathcal{D}(\Omega)$.
Al espacio de las distribuciones se le denota por

$$\mathcal{D}^{'}(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \text{es una distribución sobre } \Omega.\}$$

Ejemplo: Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos la forma lineal $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow K$, definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Entonces, $T_u \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

Proposición 1.2.7

$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ es una inmersión continua.

Demostración. Ver Cavalcanti [7].

Observación 1.2.8 *: $L^1_{loc}(\Omega) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{D}^{'}(\Omega)$*

En efecto, existe δ_{x_0} , llamado Delta de Dirac ó medida de Dirac, tal que $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ y $\delta_{x_0} \notin L^1_{loc}(\Omega)$; $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ver Cavalcanti [7].

Proposición 1.2.9

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, entonces para $1 < p < +\infty$ se tiene la siguiente cadena de inmersiones

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^{'}(\Omega)$$

Demostración. Ver Cavalcanti [7].

Definición 1.2.10 (Derivada débil o distribucional)
Sean $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$, se define la derivada de T de orden α,

$$\langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{D}^\alpha \varphi \rangle, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observación. El operador:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha : \ \ \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \ \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\longmapsto \ \mathcal{D}^\alpha T \end{aligned}$$

es lineal y continua en el sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$. ver Cavalcanti [7]
Ejemplo: Sea u la función de Heaviside definida en $\mathbb{R}$ por:

$$u(x) = \begin{cases} 1 \ \ ; & \text{si } x > 0 \\ 0 \ \ ; & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

entonces $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$; pero u' en el sentido de las distribuciones no es integrable.
En efecto, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\left\langle u', \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \varphi' \right\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0)$$

esto es,

$$\left\langle u', \varphi \right\rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle .$$

Por tanto, $u' = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

1.3 Espacios de Sobolev e Inmersiones

Definición 1.3.1 (Espacios de sobolev)
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, $1 \leq p < +\infty$, $m \in \mathbb{N}$ se define el Espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \ \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega) \ , \ \forall \ |\alpha| \leq m\}$$

Observación 1.3.2

a) $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial.

b) $\mathcal{D}^\alpha u$ son derivadas en el sentido distribucional (ó débil).

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, se define la norma de u por

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^p dx = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p$$

Nota:

1) Cuando $m = 1, p = 2$ se tiene,
   $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ y en general $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$

2) El producto interno en $W^{m,2}(\Omega)$ es dado por

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha|\leq m} (\mathcal{D}^\alpha u, \mathcal{D}^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

   y cuando $p = +\infty$

$$\|u\|_{\infty,p} = \max_{|\alpha|\leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_\infty$$

   Ver Adams [1].

Proposición 1.3.3

El espacio $H^m(\Omega)$ con el producto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \mathcal{D}^\alpha u(x) \mathcal{D}^\alpha v(x) dx$$

y la norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^p dx$$

es un espacio de Hilbert reflexivo y separable.

Demostración. Ver Brézis [5].

Proposición 1.3.4

El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es de Banach.

Demostración. Ver Adams [1].

Proposición 1.3.5 (Fórmula de Green)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado bien regular. Sean $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces para cada $1 \leq i < n$, se tiene

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, v\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, \nu_i\, d\Gamma$$

donde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ denota el vector normal unitario exterior de Γ.

Si $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \int_\Omega (-\Delta u) v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma$$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ es la derivada direccional en la dirección del vector u.

Demostración. Ver Kesavan [13].

Desde que, $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $W^{m,p}(\Omega)$, para $m \geq 1$ definimos el espacio de Sobolev, $W_0^{m,p}(\Omega)$ por

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\;W^{m,p}(\Omega)}$$

cuando $p = 2$, se escribe $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$

Podemos caracterizar el espacio $H_0^m(\Omega)$ por

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \ / \ u|_\Gamma = 0 \ \}$$

$\Gamma = \partial\Omega$ frontera de Ω

Definición 1.3.6 (Espacio dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$)

Para $1 \leq p < \infty$, $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se define $W^{-m,q}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))'$, dual topológico.

Si $p = 2$ se tiene, $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'$

y podemos caracterizar el espacio $W^{-m,q}(\Omega)$ enunciado en el teorema siguiente.

Teorema 1.3.7

Sea T una distribución sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Entonces $T \in W^{-m,q}(\Omega)$, si y solo si, existen funciones $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tal que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{D}^\alpha g_\alpha$$

Demostración. Ver Adams [1].

Teorema 1.3.8 (Inmersión del espacio de Sobolev)

Sean $1 \le p < +\infty,\ mp < n, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *está contenido en* $L^q(\mathbb{R}^n)$ *y se verifica*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|\le m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ ,\ \forall u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

donde $C_0 = \dfrac{(n-1)p}{(n-p)}$.

Demostración. Ver Adams [1].

Corolario 1.3.9

Si $1 \le p < +\infty,\ \ mp < n, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ *entonces*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

Demostración. Ver Adams [1].

Corolario 1.3.10

Si $1 \le p < +\infty,\ mp < n,\ p \le q \le \dfrac{np}{n-mp}$ *entonces*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

Demostración. Ver Adams [1].

Teorema 1.3.11

Sea $m \in \mathbb{N},\ 1 \le p < +\infty$

a) Si $mp < n$ *y* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$

b) Si $mp = n$ *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)\ \ ;\ \forall q \in [p, +\infty)$

c) Si $mp > n$ *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)\ \ ;\ \forall\ q \in [p, +\infty)$

Demostración. Ver Kesavan [13].

Observación 1.3.12

Del teorema precedente se tienen:

a) $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{R}^n)$ para $n > 2; 1 \le p \le \dfrac{n}{n-2}$

b) $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)\ ;\ \forall q \ge 2$

c) $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$

1.4 Algunos resultados de interés

Lema 1.4.1 (Gronwall)

Sea $m \in L^1(0,T)$ *tal que* $m \geq 0$ *casi siempre en* $]0,T[$ *y sea* $a \geq 0$.

Consideremos $\varphi \in C^0([0,T],\mathbb{R})$ *tal que*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^T m(s)\varphi(s)ds\,, \quad \forall t \in \,]0,T[\,.$$

Entonces

$$\varphi(t) \leq a\ exp\left(\int_0^T m(s)ds\right), \quad \forall t \in \,]0,T[\,.$$

Caso simple:

Sea $\varphi \in C^0([0,T],\mathbb{R})\,;\varphi(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0,T]$ y

$$\varphi(t) \leq k_1 + k_2 \int_0^t \varphi(s)ds$$

entonces

$$\varphi(t) \leq k_1 e^{k_2 t}, \quad \forall t \in [0,T]$$

en particular $\varphi \equiv 0,\ si\ k_1 = 0$

Demostración. Ver Brézis [5]. En esta sección asumiremos conocidos los conceptos de integral y medida según Bochner y resultados básicos relacionados.

Definición 1.4.2

Sea X *un espacio de Banach separable, definimos el espacio*

$$L^p(0,T;X) = \left\{u : [0,T] \to X \text{ fuertemente medible } / \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty\right\}$$

para $1 \leq p < +\infty$ *se define en* $L^p(0,T;X)$, *la norma*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(x)\|_X^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

En consecuencia $\left(L^p(0,T;X), \|,\|_{L^p(0,T;X)}\right)$ *es un espacio de Banach.*

Cuando $p = 2$ y X es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T;X)$ es un espacio de Hilbert, con producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t)v(t))_X\, dt$$

Observemos que la función $t \longrightarrow (u(t), v(t))_X$ es integrable en $[0, T]$ para todo $u, v \in L^2(0, T; X)$, pues

$$|\,(u(t), v(t))\,|_X \leq \|u(t)\|_X \|v(t)\|_X \in L^1(0, T)$$

Definición 1.4.3

Se define el espacio

$$L^\infty(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \to X, \text{ fuertemente medible} / \sup_{t\in[0,T]} ess \left\{\|u(t)\|_X\right\} < \infty \right\}$$

Definimos una norma en $L^\infty(0, T; X)$ *por,*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]} ess \left\{\|u(t)\|_X\right\}$$

y si X *es un espacio de Banach, entonces* $\left(L^\infty(0, T; X), \|,\|_{L^\infty(0,T;X)}\right)$ *es un espacio de Banach.*

Definición 1.4.4

Se define el espacio vectorial localmente integrable

$$L^1_{loc}(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \to X, \text{ fuertemente medible} / \int_K \|u\|_X dt < \infty, \forall K \subset [0, T] \text{ compacto} \right\}$$

Definición 1.4.5

Sea X *un espacio de Banach, se define*

$$\mathcal{D}'(0, S; X) = \{T : \mathcal{D}(0, S) \to X \,/\, T \text{ es lineal y continua}\}$$

Continuidad significa: Si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(0, S)$, entonces $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ fuerte en X

$$\mathcal{D}'(0, S; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, S), X)$$

Si $1 \leq p < +\infty$, entonces el dual topológico de $L^p(0, S; X)$ se identifica con el espacio $L^{p'}(0, S; X)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, con estas identificaciones de los espacios, tenemos:

Para $f \in L^{p'}(0, S; X')$, $u \in L^p(0, S; X)$

$$\langle f, u\rangle_{L^{p'}(0,S;X'),L^p(0,S;X)} = \int_0^S \langle f(t), u(t)\rangle_{X',X}\, dt$$

Como en el caso de las distribuciones escalares, la distribución vectorial T_u es unívocamente determinado por $u \in L^p(0,S;X)$, es decir,

$$\begin{array}{rlll} T: & L^p(0,S;X) \longrightarrow & \mathcal{D}'(0,S;X) & \\ & u \longmapsto & T_u : \mathcal{D}(0,S) & \longrightarrow X \\ & & \varphi & \longmapsto \langle T_u, \varphi \rangle \end{array}$$

En efecto, dado $u \in L^p(0,S;X)$, definimos

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^S u(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,S)$$

donde la integral es entendida como una integral de Bochner en X.

$$|\langle T_u, \varphi_v \rangle| \leq \int_0^S \|u(t)\|_X \|\varphi_v(t)\| dt \leq \sup_{t\in[0,T]} |\varphi_v(t)| \int_0^S \|u(t)\|_X dt$$

de esta relación se tiene que, si $\varphi_v \to 0$ en $\mathcal{D}(0,S)$ entonces $\langle T_u, \varphi_v \rangle \to 0$ en $\mathbb{R}$, de modo que

$$T_u \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,S), X) = \mathcal{D}'(0,S;X)$$

es lineal.

Probaremos que: $Nuc(T) = \{0\}$

Sea $u \in Nuc(T)$, entonces $T_u = 0$ en

$$\mathcal{D}'(0,S;X) \ ; \ \langle T_u, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

entonces

$$0 = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^S u(t)\varphi(t)dt \in X \ .$$

Entonces $\forall f \in X'$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle f, \int_0^S u(t)\varphi(t)dt \right\rangle \\ &= \int_0^S \langle f, \varphi(t)u(t) \rangle_{X',X} \, dt \\ &= \int_0^S \langle f, u(t) \rangle \, \varphi(t)dt \end{aligned}$$

Esto es,

$$\int_0^S \langle f, u(t) \rangle \, \varphi(t)dt = 0 \quad \forall f \in X' \ ; \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,S)$$

Del Lema de Dubois - Raymond se tiene:

$$\langle f, u(t)\rangle = 0 \ ; \ \forall f \in X' \ c.s. \text{ en } [0,S]$$

Entonces por el teorema de Hahn - Banach resulta que, $u(t) = 0$ $c.s.$ en $[0, S]$.

Por consiguiente, podemos identificar u con T_u en este sentido $L^p(0,S;X) \subset \mathcal{D}'(0,S;X)$.

Veamos que T es continua

Sea $(u_\nu) \subset L^p(0,S;X)$ una sucesión convergente a u, esto es

$$u_\nu \longrightarrow u \text{ en } L^p(0,S;X) \tag{1.1}$$

Usando las identificaciones de las funciones de $L^p(0,S;X)$ se tiene $\varphi \in \mathcal{D}(0,S)$

$$\begin{aligned} |\langle T_{u_\nu} - T_u, \varphi\rangle| = |\langle u_\nu - u, \varphi\rangle| &= \left|\int_0^S (u_\nu(t) - u(t))\,\varphi(t)dt\right| \\ &\leq \int_0^S \|u_\nu(t) - u(t)\|_X |\varphi(t)|dt \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} |\varphi(t)| \int_0^S \|u_\nu(t) - u(t)\|_X dt \ \ ; \ \sup_{t\in[0,T]} |\varphi(t)| < \infty \end{aligned} \tag{1.2}$$

pues $sop(\varphi) \subset [0,T]$.

Por otro lado de (1.1):

$$\left(\int_0^S \|u_\nu(t) - u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\dfrac{1}{p}} \to 0 \ \ , \ \ \nu \to \infty \ \ ;$$

entonces

$$\|u_\nu(t) - u(t)\|_X \to 0 \ \ , \ \ \nu \to \infty. \tag{1.3}$$

Luego de (1.3) en (1.2): $\langle T_{u_\nu}, T_u - \varphi\rangle \to 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,S)$ entonces $T_{u_\nu} \to T_u$ en $\mathcal{D}'(0,T;X)$

Por lo tanto T es continua y resulta, T inyectiva y continua que nos implica la inmersión continua siguiente

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$$

Proposición 1.4.6

Sean X y Y espacios de Banach sobre $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, entonces

i) $C^m([0,T];X)$ *con su respectiva norma es un espacio de Banach sobre* K.

ii) $C^m([0,T];X)$ *es denso en* $L^p(0,T;X)$ *y la inmersión* $C^m([0,T];X) \hookrightarrow L^p(0,T;X)$ *es continua.*

iii) $L^p(0,T;X)$ *es separable siempre que* X *es separable y* $1 \leq p < +\infty$

iv) Si la inmersión $X \hookrightarrow Y$ *es continua, entonces la inmersión* $L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y)$ *es también continua para* $1 \leq p < +\infty$.

Demostración. Ver Lions [14].

Observación 1.4.7 *Naturalmente se tiene para Ω regular que*

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q), Q =]0,T[\times \Omega$$

Definición 1.4.8 (Derivada débil respecto al tiempo)

1) Sea $u \in L^1(0,T;X)$. *Diremos que* $v \in L^1(0,T;X)$ *es la derivada débil de* u, *escribiendo* $u' = v$, *si*

$$\int_0^T \varphi\,'(t)u(t)dt = -\int_0^T \varphi(t)v(t)dt \ , \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

2) Dada la distribución vectorial u *definimos su "derivada" débil en el sentido de las distribuciones vectoriales, denotado por* u' *ó también por* $\frac{du}{dt}$ *como:*

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \ , \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

En general se establece:

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle u, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle$$

Así la expresión $\dfrac{d^n u}{dt^n}$ *representa a la "Derivada Distribución de orden* n*".*

1.5 Convergencia en $L^p(0,T;X)$

Sea X un espacio de Banach y (u_k) una sucesión en X.

1) Diremos que, (u_k) converge fuerte en X, si $\exists\ u \in X$ tal que $\|u_k - u\|_X \to 0$, cuando $k \to \infty$ y denotamos por $u_k \to u$ en X

2) Diremos que, (u_k) converge débil en X, si $\exists\ u \in X$ tal que

$$\langle f, u_k \rangle_{X',X} \to \langle f, u \rangle_{X',X} \quad \forall f \in X'$$

y denotamos por $u_v \rightharpoonup u$ en X.

3) Diremos que, (u_k) de X', converge débil estrella a u en X, si $\langle u_k, w \rangle \to \langle u, w \rangle \ \ ; \ \forall w \in X$ y denotamos por $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en X'.

Los espacios $C^k([0,T];X), k \in \mathbb{N}$, es definido como los espacios de k-tiempo funciones continuamente diferenciables sobre $[0,T]$.

Proposición 1.5.1 (Desigualdad Generalizada de Hölder)
Sea X un espacio de Banach, y dadas las funciones $u \in L^p(0,T;X),\ v \in L^q(0,T;X'),\ 1 < p < +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces se cumple la siguiente desigualdad

$$\int_0^T |\,\langle\, v(t)\,,\, u(t)\,\rangle_{X',X}\,| dt \leq \left(\int_0^T \|v\|_{X'}^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \|u\|_X^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Demostración. Ver Lions [14].

Proposición 1.5.2
Sea X un espacio de Banach reflexivo y separable, con $1 \leq p < +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 0 \leq t \leq T$, se cumplen lo siguiente:

1) *Si $u \in L^p(0,T;X)$ entonces*

$$\left\langle v^*, \int_0^T u(s) ds \right\rangle = \int_0^T \langle v^*, u(s) \rangle\, ds\ ;\ \forall v^* \in X'$$

2) Si $u \in L^p(0,T;X')$ *entonces*

$$\left\langle \int_0^T u(s)ds, v \right\rangle = \int_0^T \langle u(s), v\rangle\, ds \ ; \ \forall v \in X$$

3) Si $u_n \to u$ *en* $L^p(0,T;X)$ *entonces*

$$\int_0^T u_n(s)ds \to \int_0^T u(s)ds \text{ en } X$$

4) Si $u_n \to u$ *en* $L^p(0,T;X)$ *y* $v_n \to v$ *en* $L^q(0,T;X')$ *con* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *entonces*

$$\int_0^T \langle v_n(s), u_n(s)\rangle\, ds \to \int_0^T \langle v(s), u(s)\rangle\, ds$$

5) Si $u_n \rightharpoonup u$ *débil en* $L^p(0,T;X)$, *y* $v_n \rightharpoonup v$ *en* $L^q(0,T;X')$ *entonces*

$$\int_0^T \langle v_n(s), u_n(s)\rangle\, ds \to \int_0^T \langle v(s), u(s)\rangle\, ds$$

Demostración. Ver Lions [14].

Teorema 1.5.3 (Teorema fundamental del cálculo generalizado)
Sean X *un espacio de Banach. Para* $u \in L^p(0,T;X')$ *y* $v(t) = \int_0^t u(s)ds$ *entonces* $v \in C([0,T],X)$ *y* $v' = u$ *en* $[0,T]$ *en el sentido generalizado.*

Demostración. Ver Lions [14].

Lema 1.5.4
Sean X, Y *espacios de Hilbert, tales que* $X \hookrightarrow Y$ *inmersión continua. Si* $u \in L^p(0,T;X)$, $u'^p(0,T;Y)$, $1 < p$ *entonces* $u \in C^0([0,T],Y)$

Demostración. Ver Teman [26].

Definición 1.5.5
Diremos que una función $u : [0,T] \to Y$, *es débilmente continua si la función escalar* $t \mapsto \langle y, u(t)\rangle_{Y',Y}$ *es continua en* $[0,T]$, *para todo* $y \in Y'$, *y representaremos por* $C^0_\omega([0,T];Y)$ *al espacio de las funciones débilmente continuas en* $[0,T]$.

Lema 1.5.6

Sean X, Y espacios de Hilbert, tales que $X \subset Y$ con inmersión continua.

Si $u \in L^p(0,T;X)$, $u'^p(0,T;Y)$ entonces $u \in C^0([0,T],X)$.

Demostración. Ver Lions [14].

Lema 1.5.7

Si $u \in L^2(0,T;X)$, $u'^2(0,T;X')$ entonces $\theta \in C^\infty([0,T])$ y

1) $\dfrac{d}{dt}(u,\psi)_X = \langle u', \psi \rangle_{X',X} \quad , \ \forall \psi \in X$

2) $\dfrac{d}{dt}(\theta u) = \theta u' + \theta' u$

Demostración.

1) $\varphi \in C^\infty([0,T])$ entonces $\forall \psi \in X$

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u,\psi)_X, \varphi \right\rangle = -\int_0^T (u,\psi)_X \varphi'(t)dt \tag{1.4}$$

y

$$\begin{aligned}\left\langle \langle u', \psi \rangle_{X',X}, \varphi \right\rangle &= \int_0^T \langle u', \psi \rangle_{X',X} \, \varphi(t)\, dt \\ &= \left\langle \int_0^t u'\varphi \, dt, \psi \right\rangle_{X',X} \\ &= -\int_0^t (u,\psi)_X \, \varphi' \, dt\end{aligned} \tag{1.5}$$

De (1.4) y (1.5):

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u,\psi)_X, \varphi \right\rangle = \left\langle \langle u', \psi \rangle_{X',X}, \varphi \right\rangle \quad , \forall \varphi \in C_0^\infty([0,T])$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt}(u,\psi)_X = \langle u', \psi \rangle_{X',X} \quad , \ \forall \psi \in X$$

2) Sea $\varphi \in C_0^\infty([0,T])$ entonces

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\theta u), \varphi \right\rangle = -\int_0^T u\theta\varphi' dt = -\int_0^T u(\theta\varphi)' dt + \int_0^T u\theta'\varphi dt$$

Observación:

$$\int_0^T u(\theta\varphi)'dt = \int_0^T u(\theta'\varphi + \theta\varphi')dt = \int_0^T u\theta'\varphi + \int_0^T u\theta\varphi' dt$$

luego

$$-\int_0^T u\theta\varphi' dt = -\int_0^T u(\theta\varphi)'dt + \int_0^T u\,\theta'\varphi\; dt$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}(\theta u), \varphi \right\rangle &= \int_0^T u'\,\theta\,\varphi\, dt + \int_0^T u\,\theta'\varphi\, dt \quad ; \quad \theta\,\varphi \in C_0^\infty([0,T]) \\ &= \langle u'\theta, \varphi\rangle + \langle u\theta', \varphi\rangle \\ &= \langle u'\theta + u\theta', \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([0,T])\end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{d}{dt}(\theta u) = u'\theta + u\theta' \text{ en } \mathcal{D}(0,T)$$

Lema 1.5.8

Consideremos el espacio de Hilbert

$$W = \left\{ u/u \in L^2(0,T;X), u'^2(0,T;X') \right\}$$

con el producto interno

$$(u,v)_W = (u,v)_{L^2(0,T;X)} + (u', v')_{L^2(0,T;X')}$$

Entonces, el conjunto de los vectores $v = \theta\eta$, con $\theta \in C^\infty([0,T])$ y $\eta \in X$ es total en W. (es decir, las sumas finitas de los productos $\theta\eta$, son densos en W).

Demostración. Ver Lions [14].

Teorema 1.5.9 (Alaoglu - Bourbaki)

Sea X un espacio de Banach. Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que $\|\mu_n\|_X \leq C$, entonces existe

$$(\mu_{n_k}) \subset (\mu_n)$$

tal que $\mu_{n_k} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \mu$ en X.

Demostración. Ver Brézis [5].

Proposición 1.5.10 (Desigualdad de Poincaré)

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una constante $C > 0$ $(C = C(\Omega))$, tal que,

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right] \ , \ \forall \mu \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración. Ver Adams [1].

Lema 1.5.11 (Aubin - Lions)

Sean X_0, X, X_1 espacios de Banach, $X_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X \hookrightarrow X_1$, inmersión compacta e inmersión continua respectivamente; X_0, X reflexivos.

Sea

$$W = \left\{ w \in L^{P_0}(0,T;X_0) \ ; \ w'^{P_1}(0,T;X_1) \ ; \ 1 < P_0, P_1 < \infty \right\}$$

espacio normado con norma,

$$\|w\|_W = \|w\|_{L^{P_0}(0,T;X_0)} + \|w'\|_{L^{P_1}(0,T;X_1)},$$

entonces W es un espacio de Banach y $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{P_0}(0,T;X_0)$ con inmersión compacta.

Demostración. Ver Lions [14].

Lema 1.5.12 (Lema de Lions)

Sea (u_ν) una sucesión limitada en $L^q(\Omega)$ y supongamos que $u_\nu \to u$, casi siempre en Ω, entonces:

i) $u_\nu \to u$ *fuerte en* $L^p(\Omega), 1 \leq p < q, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

ii) $u_\nu \rightharpoonup u$ *débil en* $L^q(\Omega)$.

Demostración. Ver Lions [14].

Condiciones de Caratheodory (Prolongamiento de Soluciones)

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$, cuyos elementos son denotados por $(t,x) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ función.

Consideremos el problema de valor inicial:

$$(1.6) \qquad \begin{cases} X' = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Se dice que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisface las condiciones de Carathedory sobre Ω si:

i) $f(t,x)$ es medible en t, para cada x fijo.

ii) $f(t,x)$ es continua en x, para casi todo t fijo.

iii) Para cada compacto $K \subseteq \Omega$ existe una función real $m_k(t)$, integrable tal que:

$$|f(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m_k(t), \ \forall (t,x) \in K$$

Teorema 1.5.13 (Carathéodory)

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las condiciones de Carathéodory sobre Ω. Entonces existe una solución de (1.6) en $x(t)$ sobre algún intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $(\beta > 0)$

Demostración. Ver L.A Medeiros & P.H. Rivera [16].

Lema 1.5.14

Sea $\Omega =]0,T[\times B$ con $T > 0$ finito, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que cumple las condiciones de Carathéodory sobre Ω. Supongamos que $x(t)$ es una solución de (1.6) tal que $|x_0| \leq b$ en cualquier intervalo I, donde $x(t)$ está definida, se tendrá $|x(t)| \leq M \, \forall t \in I, M$ independiente de I y $M < b$ entonces x posee un prolongamiento en todo $[0,T]$.

Demostración. Ver L.A Medeiros & P.H. Rivera [16].

Proposición 1.5.15 (Desigualdad de Young)

Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demostración. Ver Breziz [5].

Teorema 1.5.16 (Egoroff)

Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones medibles que converge c.s. a una función con valores reales medible f sobre un subconjunto medible E de medida finita, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto medible $F \subset E$ con $mF < \varepsilon$ tal que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f uniformemente en $E\,|_F$.

Demostración. Ver Medeiros [15, 17].

Teorema 1.5.17 (Lusín)

Sea $f : X \to \mathbb{C}$ medible, $A \in M$ tal que $\mu(A) < \infty$ y $f(x) = 0$, para $x \in A^c$. Si $\varepsilon > 0$ es dado, entonces existe una función $g \in C_\varepsilon(X)$ tal que:

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon,$$

además se puede lograr que

$$\sup\{|g(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

Demostración. Ver Medeiros [15, 17].

Lema 1.5.18 (Lema de Nakao)

Sea $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función no negativa, limitada para lo cual existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ tal que:

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} (\Phi(s))^{1+\beta} \leq \alpha\left\{\Phi(t) - \Phi(t+1)\right\} \ , \ \forall t \geq 0$$

Entonces

1) Si $\beta = 0$, existen constantes positivas C y γ tal que

$$\Phi(t) \leq C\exp(-\gamma t) \ , \ \forall t \geq 0.$$

2) Si $\beta > 0$, existen constante positiva C tal que

$$\Phi(t) \leq C(1+t)^{-1/\beta} \ , \ \forall t \geq 0.$$

Demostración. Ver Lema de Nakao en [23].

1.6 Topología Débil y Débil Estrella

Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en ese espacio. Un espacio vectorial normado completo, con su métrica inducida por la norma es un espacio de Banach. Un espacio vectorial normado V se denomina un espacio de Hilbert de V, si V es un espacio de Banach con la norma inducida del producto interno. Un espacio E es separable

si existe un sub-conjunto $D \subseteq E$, tal que D es denso numerable en E.
Sea E un espacio de Hilbert y sea $f \in E^{'}$, siendo $E^{'}$ el dual de E y designamos por $T_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación dada por $T_f(x) = \langle f, x\rangle$.
La topología débil $\sigma(E, E^{'})$ sobre E es una topología menos fina en E que hace continua a todas las aplicaciones $(T_f)_{f\in E'}$. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E, la notación de convergencia débil en general está indicado como:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ débil en } \ \sigma(E, E^{'})$$

o simplemente $x_n \rightharpoonup x$ en E.

Proposición 1.6.1
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E entonces:

i) $x_n \rightharpoonup x$ *en* $\sigma(E, E^{'})$ *si y solo si* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \ ; \ \forall f \in E^{'}$

ii) $x_n \to x$ *fuerte en* E *entonces* $x_n \rightharpoonup x$ *en* E.

Demostración. Ver Breziz [5].

Proposición 1.6.2
Sea E un espacio de Banach y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $E^{'}$ entonces se tiene:

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\sigma(E, E^{'})$ *si y solo si* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \,, \ \ \forall x \in E^{'}$;

ii) $f_n \to f$ *fuerte en* $E^{'}$ *entonces* $f_n \to f$ *para* $\sigma(E^{'}, E^{''})$
$f_n \rightharpoonup f$ *en* $\sigma(E^{'}, E^{''})$ *entonces* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *para* $\sigma(E, E^{'})$.

iii) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *para* $\sigma(E^{'}, E)$, *entonces* $\| f_n \|$ *es limitada y* $\| f \| \leq Lim \inf \| f_n \|$

iv) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *para* $\sigma(E^{'}, E)$, *y si* $x_n \to x$ *fuerte en* E *entonces* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$

Demostración. Ver Breziz [5].

Proposición 1.6.3
Sea $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ *entonces* $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $L^2(0, T; L^2(\Omega))$

Demostración. Ver Breziz [5].

Capítulo 2

Existencia de solución débil o Generalizada

En este capítulo estudiaremos la existencia de solución débil de un sistema hiperbólico no lineal con condición de inclusión en la frontera, utilizando el método de Faedo - Galerkin misturado con resultados de Lions - Aubin para el sistema:

$$\left\| \begin{array}{l} u'' - \Delta u' - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + u^3 = f, \quad \text{en } (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T) \\ \\ u(x,0) = u'(x,0) = 0, \ \text{en } \Omega \\ \\ u = 0, \ \text{sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\ \\ \dfrac{\partial u'}{\partial \nu} + M(\|\nabla u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + K(u)u'' + \left|u'\right|^{\rho} u' + \Xi = 0, \ \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \\ \\ \Xi(x,t) \in \varphi(u'(x,t)) \quad \text{c.s.} \quad (x,t) \in \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \end{array} \right.$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ con frontera suficientemente regular $\Gamma = \partial\Omega$ tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \phi$ y Γ_0 , Γ_1 tienen medida positiva , $\rho \in (1, +\infty)$, $M(s)$ es una función de clase C^1 tal que $M(s) > m_0 > 0$; para alguna constante m_0, $K(s)$ es una función positiva continuamente diferenciable,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad , \quad \|\nabla u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx,$$

ν es un vector normal unitario hacia afuera sobre Γ, φ es una aplicación multivaluada no lineal y discontinua, T es un número positivo, u^3 es el término no lineal.

El resultado importante del presente trabajo es considerar la inclusión diferencial Ξ en la frontera como un amortiguamiento, donde Ξ es el término de inclusión que es un operador diferencial. Los métodos y resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo son:

- Método de Faedo - Galerkin
- Método de compacidad para términos no lineales
- Inmersión de Sobolev
- Perturbación de la energía
- Resultado de las convergencias débil y débil estrella
- Resultados de los teoremas de Lusin y Egoroff, para obtener que la inclusión diferencial

$$\Xi(x,t) \in \varphi(u^{'}(x,t)) \ c.s. \quad (x,t) \in \Sigma_1.$$

Ahora veamos algunas notaciones que utilizaremos durante el desarrollo del trabajo.

$$\begin{aligned}
H_1(\Omega) &= \left\{ u \in H^1(\Omega) : \ u = 0, \ sobre \ \Gamma_0 \right\}; \\
(u,v) &= \int_\Omega u(x)v(x)dx\,; \\
(u,v)_{\Gamma_1} &= \int_{\Gamma_1} u(x)v(x)d\Gamma\,; \\
\|u\|_{p,\Gamma_1} &= \left(\int_{\Gamma_1} |u(x)|^p d\Gamma \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

por simplicidad, denotaremos
$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{2,\Gamma_1}$ por $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_{\Gamma_1}$ respectivamente.
Luego enunciaremos las siguientes hipótesis:

(A1) $K(s)$ es una función real continua satisfaciendo las condiciones:

(2.1) $\qquad 0 < K_0 \leq K(s) \leq K_1(1+|s|^\rho)$ para algún $K_0, K_1 > 0$

(2.2) $\qquad |K'(s)|^{\frac{\rho}{\rho-1}} \leq K_2\,(1+K(s))$ para algún $K_2 > 0$

(2.3) $\qquad |K'(s)| \leq d_0,$ donde d_0 es una constante positiva.

(A2) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función localmente acotada, verificando

$$|b(s)| \leq \mu_1(1 + |s|); \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

para algún $\mu_1 > 0$.

La función $M(s)$ es de clase C^1, tal que $M(s) > m_0 > 0$, para alguna constante m_0.

La función multivaluada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es obtenido supliendo saltos de una función $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por medio de las funciones $\underline{b_\varepsilon}$, $\overline{b\,_\varepsilon}$, $\underline{b}$, $\overline{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
donde

$$\underline{b_\varepsilon}(t) = ess \inf_{|s-t| \leq \varepsilon} \{b(s)\} \ ;$$

$$\overline{b\,_\varepsilon}(t) = ess \sup_{|s-t| \leq \varepsilon} \{b(s)\} \ ;$$

$$\underline{b}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underline{b_\varepsilon}(t) \ ;$$

$$\overline{b}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \overline{b\,_\varepsilon}(t) \ ;$$

$$\varphi(t) = [\underline{b}(t), \overline{b}(t)]$$

Utilizaremos la regularización de b definido por:

$$b^m(t) = m \int_{-\infty}^{+\infty} b(t - \tau)\rho(m\tau)d\tau \ ;$$

donde $\rho \in C_0^\infty\left((-1, 1)\right)$; $\rho \geq 0$ y $\displaystyle\int_{-1}^{1} \rho(\tau)d\tau = 1$

Definición 2.1 (Solución débil o generalizada)
Una función $u(x, t)$ es una solución débil ó generalizada del sistema (1) si:

1) $u \in L^\infty\left(0, T; H_1(\Omega)\right)$, $u^3 \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$, $f \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$

2) $u' \in L^2\left(0, T; H_1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0, T; L^{\rho+2}(\Gamma_1)\right)$

3) $u'' \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega) \cap L^2(\Gamma_1)\right)$

4) $u(x, 0) = u'(x, 0) = 0,$

existe $\Xi \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right)$, $v \in W = H_1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Gamma_1)$, $\psi \in C^1(0,T)$ *con* $\psi(T) = 0$ *satisfaciendo las relaciones:*

$$(2.5)\qquad \int_0^T \Big\{(u'', v) + (\nabla u', \nabla v) + M(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla v) + \left(|u'|^\rho\, u' - K'(u)\,(u')^2 + \Xi\ ,\ v\right)_{\Gamma_1}\Big\}\,\psi(t)dt$$

$$- \int_0^T (K(u)u', v)_{\Gamma_1}\, \psi\,'(t)dt + \int_0^T \left(u^3, v\right)\psi(t)dt = \int_0^T (f,v)\psi(t)dt$$

$$(2.6)\qquad \Xi(x,t) \in \varphi(u'(x,t)\,) \quad c.s.\ (x,t) \in \Sigma_1$$

A continuación enunciamos el teorema principal de la existencia de la solución.

Teorema 2.2

Asumiendo que se verifican las hipótesis (A1), (A2) y $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, *entonces para todo* $T > 0$ *existe una solución débil o generalizada para el sistema (1).*

A continuación veremos su demostración.

2.1 Existencia de solución

Probaremos la existencia de la solución del sistema (1) utilizando las aproximaciones de Faedo - Galerkin. Para ello, representaremos por $\{w_j\}_{j\geq 1}$ una base de Schauder en:
$W = H_1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Gamma_1)$.
Sea $W_m = \langle\{w_1, w_2, ..., w_m\}\rangle$ subespacio generado por los "m"primeros vectores de la base de W.
Consideremos $u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j$ la solución del problema aproximado de Cauchy.

$$(2.1.1)\quad (u''_m(t), w_j) + (\nabla u'_m, \nabla w_j) + M(\|\nabla u_m\|^2)(\nabla u_m, \nabla w_j) + \left(K(u_m)u''_m + \left|u'_m\right|^\rho u'_m + b^m(u'_m), w_j\right)_{\Gamma_1} + (u^3_m, w_j) = (f(t), w_j);\ \forall w_j \in W_m$$

$$u_m(0) = u_m'(0) = 0 \tag{2.1.2}$$

Por el teorema de Caratheodory 1.5.13, el sistema aproximado (2.1.1) y (2.1.2) tienen soluciones $u_m(t)$ en $[0, t_m\rangle$, ver [8]. La extensión de esta solución a todo el intervalo $[0, T]$ es una consecuencia de la estimativa apriori, el cual presisaremos a continuación:

2.2 Estimativa a priori

Multiplicamos (2.1.1) por $g_{jm}'(t)$ y sumando desde $j = 1$ hasta $j = m$, y la definición de $u_m(t)$, llegamos a

$$\begin{aligned}&(u_m''(t), u_m'(t)) + (\nabla u_m'(t), \nabla u_m'(t)) + M(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t))+\\&\Big(K(u_m(t))u_m''(t) + \left|u_m'(t)\right|^{\rho} u_m'(t) + b^m(u_m'(t))\ ,\ u_m'(t)\Big)_{\Gamma_1} + (u_m^3(t), u_m'(t)) = (f(t), u_m'(t))\end{aligned}$$

De donde obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left\|u_m'(t)\right\|^2 + \overline{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right) + \int_{\Gamma_1} K(u_m(x,t))\left(u_m'(x,t)\right)^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_4^4\right\}&\\ + \int_{\Gamma_1} b^m\left(u_m'(x,t)\right)u_m'(x,t)d\Gamma + \left\|\nabla u_m'(t)\right\|^2 + \left\|u_m'(t)\right\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2}&\\ - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} K'\left(u_m(x,t)\right)\left(u_m'(x,t)\right)^3 d\Gamma = \left(f(t), u_m'(t)\right)&\end{aligned}$$

Donde $\overline{M}(s) = \displaystyle\int_0^s M(r)dr$

Por lo tanto, integrando sobre $(0, t)$ y $u_m(0) = u_m'(0) = 0$, se tiene.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\{\left\|u_m'(t)\right\|^2 + \overline{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_4^4 + \int_{\Gamma_1} K(u_m(x,t))\left(u_m'(x,t)\right)^2 d\Gamma\right\}\\&+ \int_0^t \left\|\nabla u_m'(s)\right\|^2 ds + \int_0^t \left\|u_m'(s)\right\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2} ds + \int_0^t\int_{\Gamma_1} b^m\left(u_m'(x,s)\right)u_m'(x,s)d\Gamma ds\\&- \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} K'\left(u_m(x,s)\right)\left(u_m'(x,s)\right)^3 d\Gamma ds = \int_0^t \left(f(s), u_m'(s)\right) ds\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Por la condición (A2) tenemos

$$
\begin{aligned}
(2.2.2) \qquad \left\| b^m \left(u_m^{'}(t) \right) \right\|_{\Gamma_1}^2 &= \int_{\Gamma_1} \left(b^m(u_m^{'}(x,t)) \right)^2 d\Gamma \\
&\leq \int_{\Gamma_1} c_1 \left(1 + u_m^{'}(x,t) \right)^2 d\Gamma \\
&\leq 2c_1 \int_{\Gamma_1} \left(1 + |u_m^{'}(x,t)|^2 \right) d\Gamma \\
&= c_2 + 2c_1 \left\| u_m^{'}(t) \right\|_{\Gamma_1}^2
\end{aligned}
$$

De (2.2.2) y por la desigualdad de Hölder.

$$
\begin{aligned}
(2.2.3) \left| \int_0^t \left(b^m(u_m^{'}(s)) \,,\, u_m^{'}(s) \right)_{\Gamma_1} ds \right| &\leq \left(\int_0^t \left\| b^m(u_m^{'}(s)) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \left\| u_m^{'}(s) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^t (c_2 + 2c_1 \left\| u_m^{'}(s) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds) \right)^{1/2} \left(\int_0^t \left\| u_m^{'}(s) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq c_3 \left(1 + \int_0^t \left\| u_m^{'}(s) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds \right)
\end{aligned}
$$

Observemos que, por la desigualdad de Young.

$$
\begin{aligned}
(2.2.4) \quad & \int_0^t \left\{ \left\| u_m^{'}(s) \right\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} K'\left(u_m(s)\right) \left(u_m^{'}(s) \right)^3 d\Gamma \right\} ds \\
&\geq \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| u_m^{'}(s) \right|^2 \left\{ \left| u_m^{'}(s) \right|^\rho - \varepsilon \left| u_m^{'}(s) \right|^\rho - c(\varepsilon) \left| K'(u_m(s)) \right|^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right\} d\Gamma ds
\end{aligned}
$$

También notemos que,

$$
(2.2.5) \qquad \int_0^t \left(f(s) \,,\, u_m^{'}(s) \right) ds \leq \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_0^t \left\| u_m^{'}(s) \right\|^2 ds
$$

De (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5) y para $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ en (2.2.1) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
(2.2.6) \quad & \frac{1}{2} \left\{ \left\| u_m^{'}(t) \right\|^2 + \overline{M} \left(\|\nabla u_m(t)\|^2 \right) + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_4^4 + \int_{\Gamma_1} K(u_m(t)) \left(u_m^{'}(t) \right)^2 d\Gamma \right\} \\
&+ \int_0^t \left\| \nabla u_m^{'}(s) \right\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| u_m^{'}(s) \right|^{\rho+2} d\Gamma ds \\
&\leq c(\varepsilon) \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| u_m^{'}(s) \right|^2 \left| K'(u_m(s)) \right|^{\frac{\rho}{\rho-1}} d\Gamma ds \\
&+ c_3 \left(1 + \int_0^t \left\| u_m^{'}(s) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds \right) + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_0^t \left\| u_m^{'}(s) \right\|^2 ds
\end{aligned}
$$

Por otra parte, observemos que:

$$K(u) \geq c_0(1+K(u)) \text{ donde } 2c_0 = \text{mín}\{1, K_0\}$$

De donde,

$$\int_{\Gamma_1} \left| u_m'(t) \right|^2 |K(u_m(t))|\, d\Gamma \geq c_0 \int_{\Gamma_1} \left| u_m'(t) \right|^2 [1+K(u_m(t))]\, d\Gamma \tag{2.2.7}$$

También de (A1)-(2.2) $|K'(u_m(s))|^{\frac{\rho}{\rho-1}} \leq K_2(1+K(s))$, entonces

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| u_m'(x,s) \right|^2 |K'(u_m(x,s))|^{\frac{\rho}{\rho-1}}\, d\Gamma ds \\ \leq c(\varepsilon) K_2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| u_m'(x,s) \right|^2 [1+K(u_m(x,s))]\, d\Gamma ds \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

de (2.2.7) y (2.2.8) estimando el lado derecho e izquierdo en (2.2.6),

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\left\{ \left\| u_m'(t) \right\|^2 + \overline{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2 \right) + \dfrac{1}{2}\|u_m(t)\|_4^4 + c_0 \displaystyle\int_{\Gamma_1} \left| u_m'(t) \right|^2 [1+K(u_m(t))] d\Gamma \right\} \\ + \displaystyle\int_0^t \left\| \nabla u_m'(s) \right\|^2 ds + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \left\| u_m'(s) \right\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2} ds \leq \\ c \displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| u_m'(x,s) \right|^2 [1+K(u_m(x,s))] d\Gamma ds + c_3 \left(1 + \displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left| u_m'(x,s) \right|^2 d\Gamma ds \right) \\ + \displaystyle\int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \displaystyle\int_0^t \left\| u_m'(s) \right\|^2 ds\,,\ c = c(s)K_2 \end{array} \right. \tag{2.2.9}$$

Definimos,

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\left\{ \left\| u_m'(t) \right\|^2 + \overline{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2 \right) + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_4^4 \right\} + c_0 \int_{\Gamma_1} \left| u_m'(t) \right|^2 [1+K(u_m(t))] d\Gamma$$

Entonces, de (2.2.9) y definición de E_m obtenemos:

$$E_m(t) \leq c_4 \left(1 + \int_0^t E_m(s) ds \right)$$

Así, por el lema de Gronwall, concluimos que,

$$E_m(t) \leq c_5 \ ; \ \ \forall t \in [0,T] \tag{2.2.10}$$

De (2.2.9) y (2.2.10) obtenemos $\forall\, t \in [0,T]$

$$\int_0^t \left\| \nabla u_m'(s) \right\|^2 ds \leq c_6 \ ; \qquad c_0 \int_{\Gamma_1} \left| u_m'(t) \right|^2 d\Gamma \leq c_7 \tag{2.2.11}$$

Por el teorema de inmersión y de (2.2.11) tenemos

$$\int_0^t \left\| u_m'(s) \right\|^2 ds \leq c_8 \tag{2.2.12}$$

Además, de (2.2.2) y (2.2.12) obtenemos

$$\int_0^t \left\| b^m(u_m'(s)) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds \leq c_9 \tag{2.2.13}$$

Puesto que $M(\|\nabla u_m(t)\|^2) \geq m_0 \|\nabla u_m(t)\|^2$, por (2.2.10)

$$\|\nabla u_m(t)\|^2 \leq c_{10} \tag{2.2.14}$$

Similarmente de (2.2.10) obtenemos

$$\|u_m(t)\|_4^4 \leq c_{11} \tag{2.2.15}$$

De (2.2.15) podemos decir que:

$$(u_m) \text{ es acotado en } L^\infty(0,T;L^4(\Omega)). \tag{2.2.16}$$

Luego, aplicando el Lema 1.5.11 de Aubin-Lions con $X_0 = H^1(\Omega)$, $X = X_1 = L^2(\Omega)$ y $p_0 = 2 = p_1$, podemos obtener una subsucesión denotada de la misma forma

$$u_m^3 \to u^3, \quad \text{c.s. en } Q. \tag{2.2.17}$$

De (2.2.16) concluimos que (u_m^3) es acotado en $L^{4/3}(Q)$ de donde $u_m^3 \rightharpoonup u^3$ débil en

$$L^{4/3}(Q) = [L^4(Q)]',$$

es decir,

$$\int_0^T \left(u_m^3, w_j\right)\psi(t)dt \to \int_0^T \left(u^3, w_j\right)\psi(t)dt \ , \ \psi \in C^1(0,T) \tag{2.2.18}$$

Multiplicando (2.1.1) por $g_{jm}''(t)$ y sumando desde $j = 1$ hasta $j = m$ y de la definición de $u_m(t)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\left\| u_m''(t) \right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| \nabla u_m'(t) \right\|^2 + M\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\left(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)\right) \\
&- M\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right)\left\| \nabla u_m'(t) \right\|^2 + \left(b^m(u_m'(t)\,,\,u_m''(t))\right)_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_1} K(u_m(t))(u_m''(t))^2 d\Gamma \\
&+ \left(\frac{1}{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}\left\| u_m'(t) \right\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2} + \int_\Omega u_m^3(x)u_m''(x)dx = \left(f(t), u_m''(t)\right)
\end{aligned}$$

Integrando esta igualdad sobre $(0,t)$

$$(2.2.19)\quad \left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t \left\|u_m''(s)\right\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\left\|\nabla u_m'(s)\right\|^2 ds \\ \displaystyle + \int_0^t M\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right)\frac{d}{ds}\left(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(s)\right) ds \\ \displaystyle - \int_0^t M\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right)\left\|\nabla u_m'(s)\right\|^2 ds + \int_0^t\int_{\Gamma_1} K(u_m(s))(u_m''(s))^2 d\Gamma ds \\ \displaystyle + \int_0^t\int_{\Gamma_1} b^m\left(u_m'(x,s)\right)u_m''(x,s)d\Gamma ds + \left(\frac{1}{\rho+2}\right)\int_0^t \frac{d}{ds}\left\|u_m'(s)\right\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2} ds \\ \displaystyle + \int_0^t\int_\Omega u_m^3(x,s)u_m''(x,s)dxds = \int_0^t\int_\Omega f(x,s)u'' dxds \end{array}\right.$$

Nótese que, de (A1)-(2.1)

$$\int_0^t\int_{\Gamma_1} K(u_m(x,s))(u_m''(x,s))^2 d\Gamma ds \geq K_0\int_0^t \left\|u_m''(s)\right\|_{\Gamma_1}^2 ds$$

Por otra parte tenemos que:

$$\left(\frac{1}{\rho+2}\right)\int_0^t \frac{d}{ds}\left\|u_m'(s)\right\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2} ds = \left(\frac{1}{\rho+2}\right)\left\|u_m'(s)\right\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2}$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^t M\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right)\frac{d}{ds}\left(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(s)\right) ds &= M\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right)\left(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)\right) \\ &\quad - 2\int_0^t M'\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right)\left(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(s)\right)^2 ds \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en (2.2.19)

$$(2.2.20)\quad \left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t \left\|u_m''(s)\right\|^2 ds + \frac{1}{2}\left\|\nabla u_m'(t)\right\|^2 + M\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right)\left(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)\right) \\ \displaystyle -2\int_0^t M'\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right)\left(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(s)\right)^2 ds + K_0\int_0^t \left\|u_m''(s)\right\|_{\Gamma_1}^2 ds \\ \displaystyle + \left(\frac{1}{\rho+2}\right)\|u_m'(s)\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2} \leq \int_0^t M\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right)\left\|\nabla u_m'(s)\right\|^2 ds \\ \displaystyle - \int_0^t\int_{\Gamma_1} b^m\left(u_m'(x,s)\right)^2 u_m''(x,s)d\Gamma ds - \int_0^t\int_\Omega u_m^3(x,s)u_m''(x,s)dxds \\ \displaystyle + \int_0^t\int_\Omega f(x,s)u_m''(x,s)dxds. \end{array}\right.$$

Por la desigualdad de Young, Proposición 1.5.15 e inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$:

$$
(2.2.21) \qquad \left| \begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_1} b^m \left(u_m'(x,s)\right) u_m''(x,s) d\Gamma ds \leq c(\varepsilon) \int_0^t \left\| b^m(u_m'(s)) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds \\ +\varepsilon \displaystyle\int_0^t \left\| (u_m''(s)) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds - \int_0^t \int_\Omega u_m^3(x,s) u_m''(x,s) dx ds \\ \leq c \displaystyle\int_0^t \| (u_m(s)) \|_{H_1}^4 ds + \widetilde{c} \int_0^t \left\| (u_m''(s)) \right\|_{H_1}^4 ds \\ < c_{12} \displaystyle\int_0^t \int_\Omega f(x,s) u_m''(x,s) dx ds \\ < \varepsilon \displaystyle\int_0^t \left\| u_m''(s) \right\|^2 ds + c(\varepsilon) \int_0^t \| f(s) \|^2 ds \end{array} \right.
$$

De (2.2.21) en (2.2.20), tenemos

$$
(2.2.22) \qquad \left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t \left\| u_m''(s) \right\|^2 ds + \frac{1}{2} \left\| \nabla u_m'(t) \right\|^2 + K_0 \int_0^t \left\| u_m''(s) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds \\ + \left(\dfrac{1}{\rho+2} \right) \| u_m'(t) \|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2} \leq -M \left(\| \nabla u_m(t) \|^2 \right) \left(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t) \right) \\ +2 \displaystyle\int_0^t M' \left(\| \nabla u_m(s) \|^2 \right) \left(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(s) \right)^2 ds \\ + \displaystyle\int_0^t M \left(\| \nabla u_m(s) \|^2 \right) \left\| \nabla u_m'(s) \right\|^2 ds + c(\varepsilon) \int_0^t \left\| b^m(u_m'(s)) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds \\ +\varepsilon \displaystyle\int_0^t \left\| u_m''(s) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds + c_{12} + \varepsilon \int_0^t \left\| u_m''(s) \right\|^2 ds + c(\varepsilon) \int_0^t \| f(s) \|^2 ds. \end{array} \right.
$$

Desde que ε es arbitrario y $M(s)$ es una función de clase C^1 y de (2.2.11)- (2.2.14), (2.2.22), concluimos

$$
(2.2.23) \qquad \int_0^t \left\| u_m''(s) \right\|^2 ds + \left\| \nabla u_m'(t) \right\|^2 + \int_0^t \left\| u_m''(s) \right\|_{\Gamma_1}^2 ds + \left\| u_m'(t) \right\|_{\rho+2,\Gamma_1}^{\rho+2} \leq c_{13}
$$

Nuevamente, de (2.2.11)- (2.2.14) y (2.2.23), considerando que $u \mid_{\Gamma_0} = 0$, obtenemos

$$
(2.2.24) \qquad \left| \begin{array}{l} (u_m) \ \text{ es acotado en } \ L^\infty(0,T;H_1(\Omega)) \\ (u_m') \ \text{ es acotado en } \ L^\infty(0,T;H_1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Gamma_1)) \\ (u_m'') \ \text{ es acotado en } \ L^2(0,T;L^2(\Omega) \cap L^2(\Gamma_1)) \\ (b^m(u_m')) \ \text{ es acotado en } \ L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \end{array} \right.
$$

2.3 Pasaje al límite

Multiplicando (2.1.1) por $\psi \in C^1(0,T)$ con $\psi(T)=0$ e integrando sobre $(0,T)$ obtenemos

$$
(2.3.1) \qquad \left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^T \{(u_m''(t), w_j) + (\nabla u_m', \nabla w_j) + M(\|\nabla u_m\|^2)(\nabla u_m, \nabla w_j) \\
+ \left(b^m(u_m'), w_j\right)_{\Gamma_1} + \left(\left|u_m'(t)\right|^\rho u_m'(t) - K'(u_m(t))(u_m'(t))^2, w_j\right)_{\Gamma_1}\}\psi(t)dt \\
\displaystyle - \int_0^T \left(K(u_m(t))(u_m'(t)), w_j\right)_{\Gamma_1} \psi'(t)dt \\
\displaystyle + \int_0^T (u_m^3, w_j)\psi(t)dt = \int_0^T (f(t), w_j)\psi(t)dt
\end{array}\right.
$$

De (2.2.24), obtenemos una subsucesión (denotado con el mismo símbolo al igual que la sucesión original) tal que

$$(2.3.2) \qquad u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty(0,T;H_1(\Omega))$$

$$(2.3.3) \qquad u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ en } L^\infty(0,T;H_1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Gamma_1))$$

$$(2.3.4) \qquad u_m'' \rightharpoonup u'' \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega) \cap L^2(\Gamma_1))$$

$$(2.3.5) \qquad b^m(u_m') \rightharpoonup \Xi \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$$

De (2.3.3)-(2.3.5) considerando que la inyección $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ es continua y compacta, y usando el teorema de compacidad de Aubin-Lions (Lema 1.5.11), se tiene

$$(2.3.6) \qquad |u_m'|^\rho\, u_m' \;,\; K(u_m)u_m' \;,\; K'(u_m)(u_m')^2 \in L^q(\Sigma_1), q = \frac{\rho+2}{\rho+1} > 1$$

$$(2.3.7) \qquad u_m \to u \text{ c.s. sobre } \Sigma_1 \text{ y } u_m' \to u' \text{ c.s. sobre } \Sigma_1$$

Por lo tanto,

$$
(2.3.8) \qquad \left|\begin{array}{l}
|u_m'|^\rho\, u_m' \to |u'|^\rho\, u' \\
K(u_m)u_m' \to K(u)u' \\
K'(u_m)(u_m')^2 \to K'(u)(u')^2 \quad \text{c.s. sobre } \Sigma_1
\end{array}\right.
$$

(u,Ξ) **es una solución de (1)**

Haciendo tender m al infinito en (2.3.1) y usando (2.3.3)-(2.3.8) y (2.2.18).

$$\left| \begin{array}{l} \int_0^T \{(u''(t),w_j)+(\nabla u'(t),\nabla w_j)+M(\|\nabla u(t)\|^2)(\nabla u(t),\nabla w_j)+(\Xi(t),w_j)_{\Gamma_1} \\ +\left(|u'(t)|^\rho u'(t)-K'\left(u(t)\right)\left(u'\left(t\right)\right)^2,w_j\right)_{\Gamma_1}\}\psi(t)dt-\int_0^T\left(K(u(t))(u'(t)),w_j\right)\psi'(t)dt \\ +\int_0^T(u^3(t),w_j)\psi(t)dt=\int_0^T(f(t),w_j)\psi(t)dt \end{array}\right.$$

Desde que $\{w_j\}$ es denso en $H_1(\Omega)\cap L^{\rho+2}(\Gamma_1)$, concluimos que (2.5) se tiene.

Sólo resta probar (2.6), i.e., $\Xi(x,t)\in\varphi(u'(x,t))$ c.s. $(x,t)\in\Sigma_1$. Por el Lema de compacidad de Lions-Aubin en [14], obtenemos de (2.3.4) y (2.3.5) que

$$u_m^{'}\to u' \text{ fuertemente en } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$$

Esto implica que

$$u_m^{'}(x,t)\to u'(x,t)\ \ c.s.\ \ en\ \ \Sigma_1$$

Así, para $\eta>0$ dado, aplicando los teoremas de Lusin y Egoroff, podemos elegir un subconjunto $\omega\subset\Sigma_1$ tal que la $med(\omega)<\eta$, $u'\in L^\infty(\Sigma_1\backslash\omega)$ y $u_m^{'}\to u'$ uniformemente sobre $\Sigma_1\backslash\omega$. Así, para cada $\varepsilon>0$, existe un $N>\frac{\varepsilon}{2}$ tal que

$$|u_m^{'}(x,t)-u^{'}(x,t)|<\frac{\varepsilon}{2},\forall(x,t)\in\Sigma_1\backslash\omega$$

Entonces, si $|u_m^{'}(x,t)-s|<\frac{1}{m}$, se tiene $|u_m^{'}(x,t)-s|<\varepsilon$ para todo $m>N$ y $(x,t)\in\Sigma_1\backslash\omega$.

Por consiguiente,

$$\underline{b}_{\,\varepsilon}\left(u^{'}(x,t)\right)\le b^m\left(u_m^{'}(x,t)\right)\le\overline{b}_{\,\varepsilon}\left(u^{'}(x,t)\right),\ \forall m>N\,,\ (x,t)\in\Sigma_1\backslash\omega$$

Sea $\phi\in L^\infty(\Sigma_1)\,,\ \phi\ge0$, entonces

$$(2.3.9)\qquad \left| \begin{array}{rl} \int_{\Sigma_1\backslash\omega}\underline{b}_{\,\varepsilon}(u^{'}(x,t))\phi(x,t)d\Gamma dt & \le \int_{\Sigma_1\backslash\omega}b^m(u_m^{'}(x,t))\phi(x,t)d\Gamma dt \\ & \le \int_{\Sigma_1\backslash\omega}\overline{b}_{\,\varepsilon}(u^{'}(x,t))\phi(x,t)d\Gamma dt \end{array}\right.$$

Haciendo tender $m\to+\infty$ en (2.3.9) y de (2.3.5), obtenemos

$$
\left| \begin{aligned} \int_{\Sigma_1\backslash\omega} \underline{b}_{\ \varepsilon}(u^{'}(x,t))\phi(x,t)d\Gamma dt \ &\leq \int_{\Sigma_1\backslash\omega} \Xi(x,t)\phi(x,t)d\Gamma dt \\ &\leq \int_{\Sigma_1\backslash\omega} \overline{b}_{\ \varepsilon}(u^{'}(x,t))\phi(x,t)d\Gamma dt \end{aligned} \right. \tag{2.3.10}
$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$ en (2.3.10), concluimos que

$$
\Xi(x,t) \in \varphi(u'(x,t)) \text{ c.s. } en\ \Sigma_1\backslash\omega
$$

y haciendo $\eta \to 0^+$ conseguimos

$$
\Xi(x,t) \in \varphi(u'(x,t)) \text{ c.s. } en\ \Sigma_1
$$

Esto completa la prueba.

Capítulo 3

Comportamiento Asintótico

3.1 Estudio del comportamiento asintótico

En este capítulo obtendremos el comportamiento asintótico, es decir, el decaimiento exponencial de la energía asociada al sistema hiperbólico no lineal con inclusión diferencial en la frontera, por el método de Nakao, del sistema:

$$\left\|\begin{array}{l} u'' - \Delta u' - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + u^3 = f; \text{ en } (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u'(x,0) = 0, \quad \text{en } \Omega \\ u = 0, \text{ sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u'}{\partial \nu} + M(\|\nabla u\|^2)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + k(u)u'' + \left|u'\right|^p u' + \Xi = 0, \text{ sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \\ \Xi(x,t) \in \varphi(u'(x,t)) \text{ c.s.} \quad (x,t) \in \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \end{array}\right.$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \phi$ y Γ_0 , Γ_1 tienen medida positiva , $p \in (1, +\infty)$, $M(s)$ es una función de clase C^1 tal que $M(s) > m_0 > 0$; para alguna constante $m_0, K(s)$ es una función positiva continuamente diferenciable, ν es un vector normal unitario hacia afuera sobre Γ, φ es una aplicación multivaluada no lineal y discontinua, T es un número real positivo, u^3 es el término no lineal, Ξ término de inclusión que es un operador diferencial.

Considerando las hipótesis:

(A3) $K(s)$ es una función real continuamente diferenciable satisfaciendo.

(3.1) $$0 < K_0 \leq K(s) \leq K_1(1 + |s|^p), \text{ para algún } K_0, K_1 > 0 \ , \ p > 1$$

(3.2) $$|K'(s)|^{\frac{p}{p-1}} \leq K_2\left(1 + K(s)\right) \text{ para algún } K_2 > 0 \text{ y } p \in (1, +\infty)$$

(3.3) $$|K'(s)| \leq d_0, \text{ donde } d_0 \text{ es una constante positiva.}$$

(A4) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función localmente acotada que verifica.

(3.4) $$|b(s)| \leq \mu_0(1 + |s|); \forall s \in \mathbb{R}, \text{ para algún } \mu_0 > 0$$

(A5) $\exists\ \mu_1, \mu_2 > 0; (b^m(v), v) \geq \mu_1 \|v\|_2^2 ; \forall v \in L^2(\Omega)$ y $|b(s)| \leq \mu_2|s|;\ \forall s \in \mathbb{R}$.

Ahora estamos en condiciones de establecer el resultado del decaimiento exponencial de la energía mediante el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1

Asumiendo las hipótesis dadas en (A3), (A4) y (A5) se tiene lo siguiente:

i) Si $p = 2$, entonces existen constantes C y γ positivas tal que $E(t) \leq Ce^{-\gamma t}$, c.s.; $t \geq 0$

ii) Si $p \geq 3$, entonces existe una constante $c > 0$ tal que $E(t) \leq C(1 + t)^{\frac{p}{p-2}}$, c.s.; $t \geq 0$

Ahora probaremos el decaimiento exponencial de la energía asociada al sistema (1) usando el Lema de Nakao 1.5.18

Sea $\{w_j\}_{j\geq 1}$ una base en $W = H_1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Gamma_1)$

$W_m = \langle\{w_1, w_2, ..., w_m\}\rangle$ subespacio generado por los m primeros vectores de la base Hilbertiana de W.

Consideremos $u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$ la solución del problema aproximado de Cauchy.

(P.A) $$\left\| \begin{array}{l} (u''_m(t), v) + (\nabla u'_m, \nabla v) + M(\|\nabla u_m\|^2)(\nabla u_m, \nabla v) \\ \qquad + \left(K(u_m)u''_m + |u'_m|^p\, u'_m + b^m(u'_m), v\right)_{\Gamma_1} + (u_m^3, v) = (f(t), v); \forall v \in W_m \\ u_m(0) = u'_m(0) = 0 \ \text{ en } \ \Omega \end{array} \right.$$

3.2 Deducción formal de la energía

Para $f = 0$ y $v = u'_m(t)$ en (P. A) obtenemos:

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + (\nabla u'_m(t), \nabla u'_m(t)) + M\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right)(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t))$$
$$+(K(u_m(t))\, u''_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} + \left(|u'_m(t)|^P u'_m(t), u'_m(t)\right)_{\Gamma_1}$$
$$+(b^m(u'_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1} + \left(u^3{}_m(t), u'_m(t)\right) = 0$$

considerando las hipótesis para M, 1er T.F.C y definiendo $\frac{d}{dt}\overline{M}(t) = M(t)$ en $[0, T]$ obtenemos:

$$\text{(3.2.1)} \qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\overline{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{4}\|u_m(t)\|_4^4 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} K(u_m(t))|u'_m(t)|^2 d\Gamma\right\}$$
$$+ \|\nabla u'_m(t)\|_2^2 + \|u'_m(t)\|_{p+2,\Gamma_1}^{p+2} + (b^m(u'_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1}$$
$$- \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} K'(u_m(t))(u'_m(t))^3 d\Gamma = 0$$

definimos la energía

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\overline{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{4}\|u_m(t)\|_4^4 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} K(u_m(t))|u'_m(t)|^2 d\Gamma$$

reemplazando en (3.2.1) se tiene

$$\text{(3.2.2)} \qquad \frac{d}{dt}E_m(t) + \|\nabla u'_m(t)\|_2^2 = -\|u'_m(t)\|_{P+2,\Gamma_1}^{P+2} - (b^m(u'_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} K'(u_m(t))(u'_m(t))^3 d\Gamma$$

considerando las hipótesis para $K(s)$ dados en (A3): (3.1), (3.2) y aplicando la desigualdad de Young, se tiene:

$$K'(u_m(t))\, u'_m(t) \le |K'(u_m(t))|\, |u'_m(t)|$$
$$\le c(\varepsilon)\, |u'_m(t)|^p + \varepsilon |K'(u_m(t))|^{\frac{p}{p-1}}$$

haciendo operaciones adecuadas, obtenemos

$$\text{(3.2.3)} \qquad -\|u'_m(t)\|_{P+2,\Gamma_1}^{P+2} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} K'(u_m(t))(u'_m(t))^3 d\Gamma$$
$$\le -\int_{\Gamma_1} |u'_m(t)|^2 \left[|u'_m(t)|^p - c(\varepsilon)\, |(u'_m(t))|^p - \varepsilon |K'(u_m(t))|^{\frac{p}{p-1}}\right] d\Gamma$$

además de la hipótesis (A5): se tiene

$$-\left(b^{m}\left(u_{m}'\left(t\right)\right),u_{m}'\left(t\right)\right)_{\Gamma_1}\leq -\mu_1\left\|u_{m}'\left(t\right)\right\|_{2,\Gamma_1}^{2} \tag{3.2.4}$$

de (3.2.3) y (3.2.4), inmersiones de sobolev, hipótesis (A3):(3.3) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_m(t)+\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 &\leq -\mu_1\left\|u_m'\left(t\right)\right\|_{2,\Gamma_1}^2-\frac{1}{c}\left\|u_m'\left(t\right)\right\|_{2,\Gamma_1}\\&\quad+c\left(\varepsilon\right)\|u_m'(t)\|_{p+2,\Gamma_1}^{p+2}+\varepsilon d_0\left\|u_m'\left(t\right)\right\|_{2,\Gamma_1}^2\end{aligned}$$

con c cte. de inmersión, de donde para μ_1 suficientemente grande, existe $\mu>0$ tal que

$$\frac{d}{dt}E_m(t)+\|\nabla u_m'(t)\|_2^2\leq -\mu\left\|u_m'\left(t\right)\right\|_{2,\Gamma_1}^2 \tag{3.2.5}$$

esto es, la energía es no creciente y además es uniformemente acotada.

Definimos $F_m^2(t)=E_m\left(t\right)-E_m\left(t+1\right).$

Afirmación: $\exists c>0$ tal que $E_m(t)\leq cF_m^2(t)=c\left(E_m(t)-E_m(t+1)\right).$

Integrando, (3.2.5) sobre el intervalo $(t,t+1)$, utilizando T.F.C y la desigualdad de poincaré se tiene

$$E_m(t+1)-E_m(t)\leq -\frac{1}{c(\Omega)}\int_t^{t+1}\|u_m'(t)\|_2^2\,ds-\mu\int_t^{t+1}\|u_m'(s)\|_{2,\Gamma_1}^2\,ds$$

Multiplicando por (-1) la desigualdad anterior

$$\underbrace{E_m(t)-E_m(t+1)}_{F_m^2(t)}\geq\sigma\int_t^{t+1}\|u_m'(s)\|_2^2\,ds\quad \sigma=\text{mín}\left\{\mu,\frac{1}{c(\Omega)}\right\},$$

esto es,

$$\int_t^{t+1}\|u_m'(s)\|_2^2\,ds\leq\frac{1}{\sigma}F_m^2(t) \tag{3.2.6}$$

Por el T.V.M. para integrales, en los intervalos $\left[t,t+\frac{1}{4}\right]$ y $\left[t+\frac{3}{4},t+1\right]$:

$$\begin{aligned}F_m^2(t)&\geq\sigma\int_t^{t+1}\|u_m'(t)\|_2^2\,dt\\&=\sigma\left\{\int_t^{t+\frac{1}{4}}\|u_m'(t)\|_2^2\,dt+\int_{t+\frac{1}{4}}^{t+\frac{3}{4}}\|u_m'(t)\|_2^2\,dt+\int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1}\|u_m'(t)\|_2^2\,dt\right\}\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Por el T.V.M. para integrales en $\left[t, t+\frac{1}{4}\right]$, $\exists\, t_1 \in \left[t, t+\frac{1}{4}\right]$ tal que

$$\|u_m'(t_1)\|_2^2 = \frac{1}{\left(t+\frac{1}{4}-t\right)} \int_t^{t+1} \|u_m'(t)\|_2^2 \, dt,$$

entonces

$$\sigma \int_t^{t+\frac{1}{4}} \|u_m'(t)\|_2^2 \, dt = \frac{1}{4}\sigma \, \|u_m'(t_1)\|_2^2 \tag{3.2.8}$$

De igual forma en $\left[t+\frac{3}{4}, t+1\right]$, $\exists\, t_2 \in \left[t, t+\frac{1}{4}\right]$ tal que

$$\|u_m'(t_2)\|_2^2 = \frac{1}{\left(t+1-t-\frac{3}{4}\right)} \int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} \|u_m'(t)\|_2^2 \, dt \ ,$$

entonces

$$\sigma \int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} \|u_m'(t)\|_2^2 \, dt = \frac{1}{4}\sigma \, \|u_m'(t_2)\|_2^2 \tag{3.2.9}$$

De (3.2.7) y (3.2.8)

$$\begin{aligned} F_m^2(t) &\geq \sigma \int_t^{t+\frac{1}{4}} \|u_m'(t)\|_2^2 \, dt \\ &\geq \frac{1}{4}\sigma \, \|u_m'(t_1)\|_2^2 \, , \end{aligned}$$

entonces

$$\|u_m'(t_1)\|_2 \leq \frac{2}{\sqrt{\sigma}} F_m(t) \tag{3.2.10}$$

Análogamente de (3.2.7) y (3.2.9)

$$\begin{aligned} F_m^2(t) &\geq \sigma \int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} \|u_m'(t)\|_2^2 \, dt \\ &\geq \frac{1}{4}\sigma \, \|u_m'(t_2)\|_2^2 \, , \end{aligned}$$

entonces

$$\|u_m'(t_2)\|_2 \leq \frac{2}{\sqrt{\sigma}} F_m(t) \tag{3.2.11}$$

Ahora, reemplazando v por $u_m\,(t)$ en (P. A) y con $f = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} &(u_m{}''\,(t)\,, u_m\,(t)) + (\nabla u_m'\,(t)\,, \nabla u_m\,(t)) + M\left(\|\nabla u_m\,(t)\|^2\right)(\nabla u_m\,(t)\,, \nabla u_m\,(t)) \\ &\quad + \Big(K(u_m(t)) u''_m(t) + |u_m'(t)|^P u_m'(t) + b^m\,(u_m'(t))\,, u_m(t)\Big)_{\Gamma_1} \\ &\quad + \left(u_m^3(t), u_m(t)\right) = 0, \quad u_m \in W_m \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Entonces se tiene la siguiente:

Observación

$$\frac{d}{dt}\left(u'_m(t),u_m(t)\right)=\left(u''_m(t),u_m(t)\right)+\left(u'_m(t),u'_m(t)\right)$$

Entonces $\left(u''_m(t),u_m(t)\right)=\dfrac{d}{dt}\left(u'_m(t),u_m(t)\right)-\|u'_m(t)\|_2^2$.

De la observación en (3.2.12)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(u'_m(t),u_m(t)\right)-\|u'_m(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2\\&\quad+M\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right)\|\nabla u_m(t)\|^2+\int_{\Gamma_1}K\left(u_m(t)\right)u''_m(t)u_m(t)d\Gamma\\&\quad+\int_{\Gamma_1}|u'_m(t)|^P u'_m(t)u_m(t)d\Gamma+\int_{\Gamma_1}b^m\left(u'_m(t)\right)u_m(t)d\Gamma+\int_\Omega u_m^3(t)u_m(t)dx=0\end{aligned}$$

Mayorando a izquierda, la hipótesis: $K(s)\geq K_0 \quad \wedge \quad M(s)>m_0\,,\ \forall s\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(u'_m(t),u_m(t)\right)-\|u'_m(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2\\&\quad+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2+K_0\int_{\Gamma_1}u''_m(t)u_m(t)d\Gamma+\int_{\Gamma_1}|u'_m(t)|^P u'_m(t)u_m(t)d\Gamma\\&\quad+\int_{\Gamma_1}b^m\left(u'_m(t)\right)u_m(t)d\Gamma+\|u_m(t)\|_4^4\leq 0\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

de la definición de b^m y propiedad arquimediana se obtiene,

$$|b^m(t)|\leq\mu_3\,|t|\tag{3.2.14}$$

Desde que $\overline{M}(t)=\displaystyle\int_0^t M(r)dr$, entonces por el T.V.M. para integrales en $[0,t]$, obtenemos $\overline{M}\,(t)=ct$, en $(0,t)$, de donde

$$m_0\|\nabla u_m(t)\|^2=\frac{m_0}{c}\overline{M}\left(\|\nabla u_m(t)\|^2\right)\tag{3.2.15}$$

también se tiene que,

$$\frac{d}{ds}(u'_m(s),u_m(s))_{\Gamma_1}=\left(u''_m(s),u_m(s)\right)+\left(u'_m(s),u'_m(s)\right)=\left(u''_m(s),u_m(s)\right)+\|u'_m(s)\|_{2,\Gamma_1}^2$$

por lo tanto

$$(u''_m(s),u_m(s))_{\Gamma_1}=\frac{d}{ds}\left(u'_m(s),u_m(s)\right)-\|u'_m(s)\|_{2,\Gamma_1}^2\tag{3.2.16}$$

Además desde que, $L^4(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ se tiene

$$\|u_m(t_i)\|\leq C\|u_m(t_i)\|_4\Rightarrow\|u_m(t_i)\|^4\leq c^4\,\|u_m(t_i)\|_4^4=4c^4\left(\frac{1}{4}\,\|u_m(t_i)\|_4^4\right)\leq 4c^4\left(E_m(t_i)\right)$$

Por lo tanto,

$$\|u_m(t_i)\| \leq \sqrt[4]{4}\,c(E_m(t_i))^{1/4} \leq \sqrt[4]{4}\,c(E_m(t_i))^{1/2}, \quad i=1,2 \tag{3.2.17}$$

Y también de (3.2.10) y (3.2.11) tenemos

$$\|u_m'(t_i)\| \leq \frac{2}{\sqrt{\sigma}}F_m(t) \quad , i=1,2 \tag{3.2.18}$$

Ahora de (3.2.14)-(3.2.18) en (3.2.13) e integrando en $(t_1,t_2)\subset(t,t+1)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{m_0}{c}\int_{t_1}^{t_2}\overline{M}\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right)ds \\ +\int_{t_1}^{t_2}\|u_m(s)\|_4^4\,ds \leq 4c\sqrt{2\sigma^{-1}}\,(1+K_0)\,F_m\,(t)\sup_{s\in(t_1,t_2)}E_m^{\frac{1}{2}}\,(s) \\ +\frac{1}{2}\|\nabla u_m(t_1)\|^2+K_0\int_{t_1}^{t_2}\|u_m'(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds \\ +\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1}|u_m'(s)|^P\,|u_m'(s)|\,|u_m(s)|\,d\Gamma ds \\ +\mu_3\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1}|u_m'(s)|\,|u_m(s)|\,d\Gamma ds\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Observación 1

Se tiene de (3.2.5)

$$\frac{d}{dt}E_m(t)+\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 \leq -\mu\,\|u_m'(t)\|_{2,\Gamma_1}^2 \Rightarrow \quad \mu\,\|u_m'(t)\|_{2,\Gamma_1}^2 \leq -\frac{d}{dt}E_m(t)$$

integrando en $(t,t+1)$:

$$\mu\int_t^{t+1}\|u_m'(s)\|_{2,\Gamma_1}^2\,ds \leq -\int_t^{t+1}\frac{d}{ds}E_m(s)ds = -\left\{E_m\,(t+1)-E_m\,(t)\right\}$$

por lo tanto

$$\int_t^{t+1}\|u_m'(s)\|_{2,\Gamma_1}^2\,ds \leq E_m\,(t)-E_m\,(t+1) = {F_m}^2\,(t)$$

Observación 2

Por la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1}|u_m'\,(s)|\,|u_m\,(s)|\,d\Gamma ds &\leq \int_t^{t+1}\int_{\Gamma_1}|u_m'\,(s)|\,|u_m\,(s)|\,d\Gamma ds, \qquad (t_1,t_2)\subset(t,t+1) \\ &\leq c_\varepsilon\int_t^{t+1}\|u_m'\,(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds+\varepsilon\int_t^{t+1}\|u_m\,(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds\end{aligned}$$

de la observación 2 en (3.2.19), considerando

$$c_5 = \min\left(\frac{m_0}{c}, 1\right), \quad c_6 = 4c\sqrt{2\sigma^{-1}}\,(1 + K_0)$$

se tiene

$$\begin{aligned}
(3.2.20)\qquad c_5\left(\int_{t_1}^{t_2} \overline{M}\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right) ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(s)\|_4^4\, ds\right) &\leq c_6 F_m(t) \sup_{s\in(t_1,t_2)} E_m{}^{\frac{1}{2}}(s) \\
+ \frac{1}{2}\|\nabla u_m(t_1)\|^2 + K_0 F_m^2(t) &+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1} |u_m'(s)|^P\, |u_m'(s)|\, |u_m(s)|\, d\Gamma ds \\
&+ \mu_3 c_\varepsilon F_m^2(t) + \mu_3\varepsilon \int_t^{t+1} \|u_m(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds
\end{aligned}$$

integrando la energía de t_1 a t_2 y de (3.2.20), se obtiene

$$\begin{aligned}
(3.2.21)\qquad \int_{t_1}^{t_2} E_m(s)\, ds &\leq \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \|u_m'(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \overline{M}\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right) ds \\
&+ \frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} \|u_m(s)\|_4^4 ds + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1} K(u_m(s))\, |u_m'(s)|^2 d\Gamma ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \|u_m'(s)\|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \overline{M}\left(\|\nabla u_m(s)\|^2\right) ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(s)\|_4^4 ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1} K(u_m(s))\, |u_m'(s)|^2 d\Gamma ds \\
&\leq \frac{1}{c_5}\left\{ c_6 F_m(t) \sup_{s\in(t_1,t_2)} E_m{}^{\frac{1}{2}}(s) + \frac{1}{2}\|\nabla_m(t_1)\|^2 + K_0 F_m{}^2(t) \right. \\
&+ \mu_3 c_3 F_m{}^2(t) + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1} |u_m'(s)|^p\, |u_m'(s)|\, |u_m(s)|\, d\Gamma ds \\
&\left. + \mu_3\varepsilon \int_t^{t+1} \|u_m(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds \right\} \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \|u_m'(s)\|^2 ds + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1} K(u_m(s))\, |u_m'(s)|^2 d\Gamma ds
\end{aligned}$$

Observación 3

De la hipótesis sobre $K : 0 < K_0 \leq K(s) \leq K_1 (1 + |s|^p)$, $\quad p > 1$

$$\text{(i)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} K(u_m(s)) |u'_m(s)|^2 d\Gamma ds \leq K_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} (1 + |u_m(s)|^p) |u'_m(s)|^2 d\Gamma ds$$
$$= K_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} |u'_m(s)|^2 d\Gamma ds$$
$$+ K_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} |u_m(s)|^p |u'_m(s)|^2 d\Gamma ds$$
$$= K_1 \int_{t_1}^{t_2} \|u'_m(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds$$
$$+ K_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} |u_m(s)|^p |u'_m(s)|^2 d\Gamma ds$$
$$\leq K_1 {F_m}^2(t) + K_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} |u_m(s)|^p |u'_m(s)|^2 d\Gamma ds$$

De la expresión (i)

$$ {F_m}^2(t) \geq \sigma \int_t^{t+1} \|u'_m(s)\|_2^2 ds$$

entonces

$$\int_t^{t+1} \|u'_m(s)\|_2^2 ds \leq \frac{1}{\sigma} {F_m}^2(t)$$

de la observación 3 en (3.2.21)

$$\text{(3.2.22)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} E_m(s)\, ds \leq c_7 F_m(t) \sup_{s \in (t_1, t_2)} {E_m}^{\frac{1}{2}}(s) + c_8 {F_m}^2(t)$$
$$+ c_9 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} |u'_m(s)|^p |u'_m(s)| |u_m(s)| d\Gamma ds$$
$$+ c_{10} \|\nabla u_m(t_1)\|^2 + c_{11} \int_t^{t+1} \|u_m(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds + \frac{1}{\sigma} {F_m}^2(t)$$
$$+ K_1 {F_m}^2(t) + K_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_1} |u_m(s)|^p |u'_m(s)|^2 d\Gamma ds$$

donde $\left(c_7 = \dfrac{c_6}{c_5}\,, \quad c_8 = K_0 + \mu_3 c_3, \quad c_9 = \dfrac{1}{c_5}, \quad c_{10} = \dfrac{1}{2c_5}\,, \quad c_{11} = \dfrac{\varepsilon\mu_3}{c_5}\right)$

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} E_m(s)\,ds &\le c_7 F_m(t) \sup_{s\in(t_1,t_2)} E_m{}^{\frac{1}{2}}(s) + c_{12} F_m{}^2(t) \\
&\quad + c_9 \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1} |u_m'(s)|^p\, |u_m'(s)|\, |u_m(s)|\, d\Gamma ds + c_{10} \|\nabla u_m(t_1)\|^2 \\
&\quad + c_{11} \int_t^{t+1} \|u_m(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds + K_1 \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1} |u_m(s)|^p |u_m'(s)|^2 d\Gamma ds \\
&\le c_7 F_m(t) \sup_{s\in(t_1,t_2)} E_m{}^{\frac{1}{2}}(s) + c_{12} F_m{}^2(t) + c_{13} F_m(t)\, E_m{}^{\frac{1}{p}}(t)
\end{aligned}
$$

por el T.V.M. para integrales existe $\widetilde{t} \in (t_1, t_2)$ tal que

$$
\int_{t_1}^{t_2} E_m(s)ds = (t_2 - t_1)\, E_m\left(\widetilde{t}\right),
$$

entonces en (3.2.19)

$$
(t_2 - t_1)\, E_m\left(\widetilde{t}\right) \le c_7 F_m(t) \sup_{s\in(t_1,t_2)} E_m{}^{\frac{1}{2}}(s) + c_{12} F_m{}^2(t) + c_{13} F_m(t)\, E_m{}^{\frac{1}{p}}(t)
$$

$$
E_m\left(\widetilde{t}\right) \le c_{14} F_m(t) \sup_{s\in(t_1,t_2)} E_m{}^{\frac{1}{2}}(s) + c_{15} F_m{}^2(t) + c_{16} F_m(t)\, E_m{}^{\frac{1}{p}}(t) \tag{3.2.23}
$$

donde $\left(c_{14} = \dfrac{c_7}{t_2 - t_1}\,, \quad c_{15} = \dfrac{c_{12}}{t_2 - t_1}\,, \quad c_{16} = \dfrac{c_{13}}{t_2 - t_1}\right)$. Por la desigualdad de Young para $p = q = 2$ y constantes $c_\varepsilon, \varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
c_{14} F_m(t) \sup_{s\in(t_1,t_2)} E_m{}^{\frac{1}{2}}(s) &= c_\varepsilon (c_{14} F_m(t))^2 + \varepsilon \left(\sup_{s\in(t_1,t_2)} E_m{}^{\frac{1}{2}}(s) \right)^2 \\
&= c_\varepsilon (c_{14})^2 F_m{}^2(t) + \varepsilon \sup_{s\in(t_1,t_2)} E_m(s)\,; \quad 0 < \varepsilon < 1
\end{aligned} \tag{3.2.24}
$$

Por la desigualdad de Young para p y $q = \dfrac{p}{p-1}$; $\dfrac{1}{p} + \dfrac{p-1}{p} = 1$, se tiene

$$
\begin{aligned}
c_{16} F_m(t)\, E_m{}^{\frac{1}{p}}(t) &= (c_{16} F_m(t))\, E_m{}^{\frac{1}{p}}(t) \\
&\le \left(\frac{p-1}{p}\right) (c_{16} F_m(t))^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p}\left(E_m{}^{\frac{1}{p}}(t)\right)^p \\
&= \left(\frac{p-1}{p}\right) c_{16}{}^{\frac{p}{p-1}} + (F_m(t))^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p} E_m(t)
\end{aligned} \tag{3.2.25}
$$

esto es,

$$c_{16}F_m\left(t\right)E_m{}^{\frac{1}{p}}\left(t\right)\leq\left(\frac{p-1}{p}\right)c_{16}{}^{\frac{p}{p-1}}F_m(t)^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{p}E_m\left(t\right)$$

para $p=2$, se tiene

$$c_{16}F_m\left(t\right)E_m{}^{\frac{1}{2}}\left(t\right)\leq\frac{1}{2}c_{16}{}^2F_m(t)^2+\frac{1}{2}E_m\left(t\right)$$

de (3.2.24) y (3.2.25) en (3.2.23).

$$E\left(\widetilde{t}\right)\leq c_\varepsilon c_{14}^2F_m{}^2\left(t\right)+\varepsilon\sup_{s\in(t_1,t_2)}E_m\left(s\right)+c_{15}F_m{}^2\left(t\right)+\frac{1}{2}c_{13}^2F_m{}^2\left(t\right)+\frac{1}{2}E_m\left(t\right)$$

$$E\left(\widetilde{t}\right)\leq c_{16}F_m{}^2\left(t\right)+\varepsilon\sup_{s\in(t_1,t_2)}E_m\left(s\right)+\frac{1}{2}E_m\left(t\right);\quad c_{16}=c_\varepsilon c_{14}^2+c_{15}+\frac{1}{2}c_{13}^2$$

$$\leq c_{16}F_m{}^2\left(t\right)+\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)\sup_{s\in(t,t+1)}E_m\left(s\right);\quad\left(t_1,t_2\right)\subset\left(t,t+1\right)$$

$\widetilde{t}\in\left(t_1,t_2\right)\subset\left(t,t+1\right)$, tomando sup en el intervalo $\left(t,t+1\right)$

$$\sup_{s\in(t,t+1)}E_m\left(s\right)\leq c_{16}F_m{}^2\left(t\right)+\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)\sup_{s\in(t,t+1)}E_m\left(s\right)$$

tomando $\varepsilon=\frac{1}{4};\varepsilon+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$$\left(1-\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\sup_{s\in(t,t+1)}E_m\left(s\right)\leq c_{16}F_m{}^2\left(t\right),\quad\left(\frac{1}{4}\right)\sup_{s\in(t,t+1)}E_m\left(s\right)\leq c_{16}F_m{}^2\left(t\right)$$

por tanto ,

$$\sup_{s\in(t,t+1)}E_m\left(s\right)\leq 4c_{16}F_m{}^2\left(t\right)$$

esto es existe, $c=4c_{16}$ constante tal que,

$$\sup_{s\in(t,t+1)}E_m\left(s\right)\leq c_{17}\left(E_m\left(t\right)-E_m\left(t+1\right)\right),\quad\text{definición de } F_m{}^2\left(t\right)$$

y como E_m es acotado y no negativo del Lema de Nakao existen contantes $C>0$ y $\gamma>0$, tales que

$$E_m\left(t\right)\leq C\exp\left(-\gamma t\right);\ \forall t>0,$$

y pasando al límite se tiene

$$E\left(t\right)\leq C\exp\left(-\gamma t\right);\quad\forall t>0.$$

Capítulo 4

Conclusiones

Se ha trabajado con la técnica dada por una consecuencia del Lema de Nakao, aplicada a energías definidas sobre subespacios finitamente generado, para luego, pasando al límite, obtener el decaimiento tanto, exponencial como polinomial. Se han tenido muchos cuidado con las estimativas de la energía tanto a derecha como a izquierda.

Estas aproximaciones por energía definidas en subespacios finitamente generado pueden ser aplicables a otros problemas de E.D.P.

Los problemas con inclusión diferencial generalmente se presentan en la teoría de Desiciones y en la Física, en especial en mecánica de sólidos.

Bibliografía

[1] Adams, R.A. and Fourier, J.F; **Sobolev Space**, Academic Press. Second Edition. Canada, 2009.

[2] Aubin J.P; Cellina A.; **Differential Inclusions, Set-Valued Maps and Viability Theory**, Springer-Verlag, Berlin 1984.

[3] Aubin P.P ; **A survey of viability theory**, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 28 (1990), pp. 749-788.

[4] Aubin J.P ; **Viability theory with14 illustrations**. Springer Science Business Media, 1991.

[5] Brezis H*ä*im. **Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations**, Springer, New York, 2011

[6] Carl S. & Heikkila S.; **An existence result for elliptic differential inclusions with discontinuous Nonlinear Analysis 18**, pp. 471-479 (1992).

[7] Cavalcanti, M., Domingos Cavalcanti, V.; **Iniciacao a Teoría das Distribuicoes e aos Espacas de Sobolev**, Vol.I e II. Maringá, Texto de Dpto. Matemática UEM, 2000

[8] Doronin G.C., Larkin N.A. and Sousa A.J. **A Hipebolic Problem with Nonlinear Second Order Boundary Camping** , Electronic J. Diff. Eqs. (1998) N° 28 1-10.

[9] Fernández E, Rojas M.A. y Viera A.J ; **Differential inclusions, Fuzzy Mathematics and Applications**, Bol. Soc. Mat. Apl. N° 24 (2003), pp. 31-62.

[10] Haeng Joo Lee, Jeongyo Park & Jong Yeoul Park; **Existence results for second-order neutral functional differential and integrodifferential inclusions in Banach spaces**, Electron. J. Diff. Eqns, Vol. 2002 (2002), N° 96, pp. 1-13

[11] Heikkila S. & Lakshmikantham V.; **Monotone Iterative Tecchniques for Discontinuous Nonlinear Differential Equations**, Marcel Dekker, New York (1994).

[12] Jong Yeoul Park, Sun Hye Park; **On asymptotic behavior of global solutions for Hyperbolic hemivariational inequalities**. Elect. J. Diff. Eqns., Vol. 2006 (2006) N° 139, pp. 1-10.

[13] Kesaran, S. ; **Topics in Functional Analysis and Applications**, Jhon Wiley Sons. New Delhi, India, 1989.

[14] Lions, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problêmes aux Límites Non Linéaires**. Paris: Dunod, 1969.

[15] Medeiros, L. A. **Integral de Lebesgue.**. UFRJ - Brasil (2003) 5ta Edición.

[16] Medeiros, L. A. & Rivera, P. H. **Espacos de Sobolev, Equacoes Diferenciais Parciais**, Textos de Métodos Matemáticos N° 9, IM-UFRJ. Rio de Janeiro - Brasil (1975).

[17] Medeiros, L. A. y Milla Miranda M. **Introducao Aos Espacos de Sobolev o as Equacoes Diferenciais Parciais**, Rio de Janeiro 1989

[18] Miettinem M; **A Parabolic Hemivariational Inecuality**, Nonlinear and 26 (1996) 725-734.

[19] Miettinem M. and Paragiotopenlos P.D.; **On Parabolic Hemivariational Inecualities and Applications**, Nonlinear and 35 (1999) 885-915.

[20] Miettinen M. & J. Haslinger; **Approximation of optimal control problema of hemivariational inequalities**, Num. Funct. Analysis Optim. 13, pp. 43-68 (1992).

[21] Piernicola Bettiol, Hélene Frankowska; **Regularity of solution maps of Differential Inclusions Under state constraints**, Set-Valued Anal. (2007) 15, pp. 21-45.

[22] Nakao M. **On Strong Solutions of Some Quasilinear Wave Equations with Viscosity**, adv. math sci appi 6(1996) 267-278.

[23] Nakao M. **Energy Decay for the Quasilinear Wave Equations with Viscosity**, Math Z. 219 (1995) 289-299.

[24] Raczynski S.; **Some remarks on nonconvex optimal control**, Journal of Mathematical Analysis and Applications, New York, 1986.

[25] Rudin, Walter ; **Real and Complex**, (3ra edic.) Mc Graw-Hill. New (1987).

[26] Teman, R. ; **Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis**, North - Holland, (1979).

[27] Tzanko Duchev-Iordan Slavov; **Singularly Perturbed Functional-Differential Inclusions**. Set- Valued Analysis 3, pp. 113-128, 1995.

[28] Yeoul Park, Hyun Min, Sim Hye; **On weak solutions for Hyperbolic Differential Inclusions with discontinuous nonlinearities**, Elect. J. Diff. Eqns, Vol 2002 (2002), N° 97, pp. 1-9.

[29] Yeoul Park & Hye Park; **Solutions for Hyperbolic system with boundary differential inclusión and nonlinear second-order boundary damping**, Elect. J. Diff. Eqns, Vol. 2003 (2003), N ° 80, pp. 1-7